ZUR CHARAKTERISIERUNG VON MINIMALLÖSUNGEN BEI APPROXIMATION MIT SUBLINEAREN FUNKTIONALEN

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

WOLF-MICHAEL KÄHLER
aus Lübeck

Bochum 1975

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546503_0017

ZUR CHARAKTERISIERUNG VON MINIMALLÖSUNGEN BEI APPROXIMATION MIT SUBLINEAREN FUNKTIONALEN

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

WOLF-MICHAEL KÄHLER
aus Lübeck

Bochum 1975

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Dissertation eingereicht am 4.5.1975
Tag der mündlichen Prüfung: 18.6.1975

Dekan: Prof. Dr. H. Amann
Referent: Prof. Dr. W. Haußmann
Korreferent: Prof. Dr. D. Braess

aku- Fotodruck, 86 Bamberg, Färbergasse 8 R

Inhaltsverzeichnis

Einleitung		1
Kapitel I	Charakterisierung von Minimallösungen durch die Verschärfte Verallgemeinerte Globale Kolmogoroff-Bedingung	
§ 0	Grundlegende Bezeichnungen	8
§ 1	Die Verschärfte Verallgemeinerte Globale Kolmogoroff-Bedingung	11
§ 2	Projektions- und Tangentialkegel	25
§ 3	Rechtsseitige Gateaux-Ableitung und Kolmogoroff-Mengen 2. Art	38
§ 4	Charakterisierung einer Minimallösung durch die Verschärfte Verallgemeinerte Globale Kolmogoroff-Bedingung	57
Kapitel II	Charakterisierung von Minimallösungen bei der Simultanapproximation	
§ 5	Charakterisierung von Minimallösungen durch die Simultane Verallgemeinerte Globale Kolmogoroff-Bedingung	68
§ 6	Charakterisierung einer echten besten Simultanapproximation	101
Literaturverzeichnis		116

Einleitung

Bei der Approximation im Vektorraum $C(Q,\mathbb{C})$ der auf einem kompakten Hausdorffraum Q stetigen komplexwertigen Funktionen bezüglich eines endlichdimensionalen Teilraums V zeigte KOLMOGOROFF[30], daß sich eine in der Čebyševnorm $\|\cdot\|$ beste Approximation $v_0 \in V$ an ein $f \in C(Q,\mathbb{C})$ (wir schreiben dafür $v_0 \in B(f,V,\|\cdot\|)$) durch die Bedingung

$$\text{(KB)} \qquad \min_{x \in m(v_0-f)} \operatorname{Re}\, \overline{(v_0(x)-f(x))}\cdot(v_0(x)-v(x)) \not< 0$$

für alle $v \in V$

mit $m(v_0-f) := \{x \in Q : |v_0(x)-f(x)| = \|v_0-f\|\}$

charakterisieren läßt. ZUHOVICKIJ und STEČKIN[41] übertrugen dieses Ergebnis auf die Hilbertraum-wertige Approximation bezüglich eines Teilraums V. Im Hinblick auf die Approximation mit nicht notwendig linearen Teilmengen V war dieses für die lineare Approximation erhaltene Resultat der Ausgangspunkt der Untersuchungen von MEINARDUS und SCHWEDT[36], BROSOWSKI[8],[9],[11], KRABS[31],[32],[33],[34], DUNHAM[19],[20], HENZE[24] und anderen.

Für den allgemeineren Fall der Approximation in einem Vektorraum X bezüglich eines sublinearen Funktionals F und einer beliebigen Teilmenge V von X gab BRECKNER[3] die folgende Verallgemeinerte Globale Kolmogoroff-Bedin-

gung als ein stets hinreichendes Kriterium für $v_o \in B(f,V,F)$ mit $f \in X$ an:

(VGKB) Zu jedem $v \in V$ gibt es ein Element L_v aus der Menge $\partial F(v_o - f)$ der Subgradienten von F in $v_o - f$ mit $\operatorname{Re} L_v(v_o - v) \leq 0$.

Sublineare Funktionale spielen insbesondere bei der "Ungleichgewichtigen Approximation" eine wesentliche Rolle. Zum Beispiel ist für $c < 0 < d$ und

$$G(x) := \begin{cases} c \cdot x & \text{für } x \leq 0 \\ d \cdot x & \text{sonst} \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

die Abbildung $F : g \longrightarrow \int_a^b G(g(x))\,dx$ ein sublineares Funktional auf dem Vektorraum $C([a,b],\mathbb{R})$, welches ein positives bzw. negatives Verhalten der Fehlerfunktion verschieden bewertet.

Anders als bei der Approximation mit einem Teilraum ist bei beliebiger Teilmenge V die VGKB im allgemeinen keine notwendige Bedingung für eine Minimallösung. BRECKNER[3] zeigte, daß die Elemente v_o von V, für welche die VGKB charakteristisch für $v_o \in B(f,V,F)$ ist, d.h. für welche V eine Kolmogoroff-Menge 1. Art in v_o bezüglich F ist, mit den solaren Punkten von V übereinstimmen. Dabei heißt $v_o \in V$ solarer Punkt von V, sofern aus $v_o \in B(f,V,F)$ stets $v_o \in B(tf + (1-t)v_o, V, F)$ für $t \geq 1$ folgt.
Als Verallgemeinerung eines von HENZE[25] für positive

sublineare Funktionale erzielten Ergebnisses wurden die Kolmogoroff-Mengen 1. Art von BRECKNER[3] ferner dadurch charakterisiert, daß $v_o \in B(f,V,F)$ für die rechtsseitige Gateaux-Ableitung F'_+ des sublinearen Funktionals F die Gültigkeit von

$$F'_+(v_o - f, v - v_o) \geq 0 \quad \text{für alle } v \in V$$

impliziert. Die direkte Äquivalenz dieser Ungleichung zur VGKB ergibt sich aus unseren Untersuchungen (vgl. § 3).

Für konvexe Teilmengen V des Vektorraums X wurde von BRECKNER[3] als Erweiterung der für Teilräume und konvexe Teilmengen eines normierten Vektorraums bekannten Ergebnisse von GARKAVI[22], SINGER[38], CHOQUET[15] und HAVINSON[23] nachgewiesen, daß die Gültigkeit der sogenannten Verschärften Verallgemeinerten Globalen Kolmogoroff-Bedingung

(VVGKB) Es gibt ein von $v \in V$ unabhängiges $L \in \partial F(v_o - f)$ mit $\operatorname{Re} L(v_o - v) \leq 0$ für alle $v \in V$.

charakteristisch für eine Minimallösung $v_o \in V$ an $f \in X$ ist.

Für normierte Vektorräume stellten sich BRECKNER und KOLUMBAN[5] die Frage nach der möglichen Erweiterung dieses Ergebnisses im Hinblick auf die Struktur der Menge V. Die von ihnen angegebene Aussage erwies sich als nicht richtig, was BRECKNER und BROSOWSKI[4] durch ein Gegenbeispiel demonstrierten.

Wir stellen uns daher allgemein für den Fall der Approximation in einem Vektorraum X bezüglich eines sublinearen Funktionals F die Frage nach Kriterien für die Mengen $V \subset X$, welche die Charakterisierung einer Minimallösung durch die VVGKB gestatten. Dabei gewinnen wir Bedingungen für zu V gehörende Projektions- und Tangentialkegel (vgl. § 2 und § 4). Auf Grund der Zusammenhänge zwischen diesen Kegeln und deren konvexen Hüllen können wir zeigen, daß insbesondere die bezüglich eines $v_o \in V$ gleichmäßig quasisternförmigen Mengen $V \subset X$, d.h. für die zu $v_1, v_2 \in V$ ein $s \in (0,1]$ mit $v_o + ts(v_1 - v_o) + (1-t)s(v_2 - v_o) \in V$ für alle $t \in [0,1]$ existiert, den angegebenen Kriterien genügen.

Für die Approximation in Vektorräumen bezüglich sublinearer Funktionale können wir durch das Verhalten der rechtsseitigen Gateaux-Ableitung eine stets notwendige Bedingung für eine Minimallösung angeben. Wir charakterisieren die Mengen, für welche diese Eigenschaft auch stets hinreichend für eine beste Approximation ist, und nennen sie ebenfalls Kolmogoroff-Mengen 2. Art, da wir durch Spezialisierung auf normierte Vektorräume aus einer der angegebenen Charakterisierungsbedingungen die von BROSOWSKI und WEGMANN [13] erhaltene Kennzeichnung der Kolmogoroff-Mengen 2. Art gewinnen. Das dargestellte Ergebnis gibt uns insbesondere die Möglichkeit, gewisse Funktionenfamilien V als Kolmogo-

roff-Mengen 2. Art zu erkennen, ohne uns auf die Darstellung der Extremalpunkte von Subgradienten stützen zu müssen. Als Beispiel geben wir hierzu die Menge der Verallgemeinerten Rationalen Funktionen an (vgl. § 3). Ferner weisen wir nach, daß auch allgemein in Vektorräumen X bei Approximation mit sublinearen Funktionalen F jede Kolmogoroff-Menge 2. Art eine Kolmogoroff-Menge 1. Art ist. Ebenso sind diejenigen Mengen V Kolmogoroff-Mengen 1. Art, für welche aus $v_0 \in B(f,K_F(v_0,V),F)$ auch $v_0 \in B(f,V,F)$ (für $f \in X$, $v_0 \in V \subset X$ und den Tangentialkegel $K_F(v_0,V)$) folgt.

MOURSUND[37] hat eine Charakterisierung einer Minimallösung bei der Approximation durch einen endlichdimensionalen Teilraum V an eine stetig differenzierbare Funktion $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ bei gleichzeitig günstiger Approximation von f' durch die Ableitung der Minimallösung angegeben. Das erzielte Ergebnis stellt die Frage nach den Möglichkeiten der Charakterisierung von besten Simultanapproximationen in allgemeinen Räumen. Von BREDENDIEK[6],[7] wurde dazu das folgende Problem näher untersucht:

X_1 und X_2 seien normierte Vektorräume über $\mathbb{R}$ und A eine auf einem Teilraum $V \subset X_1$ stetige (bzw. auf einer der Darstellbarkeitsbedingung genügenden Teilmenge $V \subset X_1$ Fréchet-differenzierbare) Abbildung von X_1 nach X_2.

Dann ist zu vorgegebenem $f \in X_1$ ein $v_o \in V$ zu charakterisieren, welches $\max\{\|v-f\|, \|Av-Af\|\}$ zum Minimum macht. Dabei wird unter einer besten Simultanapproximation v_o stets eine echte beste Simultanapproximation verstanden, d.h. v_o ist keine Minimallösung eines der beiden Teilprobleme.

Wir interessieren uns im Kapitel II dieser Arbeit für notwendige und hinreichende Bedingungen für eine (nicht notwendig echte) beste Simultanapproximation. Dabei betrachten wir den Fall der Approximation in Hausdorffschen lokalkonvexen Vektorräumen X_1 und X_2 bezüglich stetiger sublinearer Funktionale F_1 und F_2 bei gegebener Abbildung A von X_1 nach X_2. Wir beweisen zunächst einen allgemeinen Einschließungssatz für stetige konvexe Funktionale F_1 und F_2, aus welchem wir die stets hinlängliche Simultane Verallgemeinerte Globale Kolmogoroff-Bedingung

$$\text{(SVGKB)} \quad \min_{\substack{(L_1,L_2) \\ \in EP(\partial F_1(v_o-f))\times EP(\partial F_2(Av_o-Af))}} \min\{ReL_1(v_o-v), ReL_2(Av_o-Av)\} \not\leq 0 \text{ für } v \in V$$

für eine beste Simultanapproximation ableiten können. Als eine Eigenschaft für die Notwendigkeit der SVGKB für eine beste Simultanapproximation geben wir die S-Regularität einer Menge V an, welche im Spezialfall der gewöhnlichen Approximation mit dem zur Solarität äquivalenten Regularitätsbegriff von BROSOWSKI und

WEGMANN[13] übereinstimmt (vgl. § 5). Wir zeigen, daß die von BREDENDIEK[6],[7] angegebenen Kriterien für die Notwendigkeit der SVGKB für eine echte beste Simultanapproximation die S-Regularität implizieren. Ferner geben wir ein Beispiel dafür, daß eine S-reguläre Menge V nicht notwendig den von BREDENDIEK[6],[7] angegebenen Kriterien genügt.

Abschließend untersuchen wir notwendige und hinreichende Bedingungen für die S-Regularität einer Menge $V \subset X_1$ im Hinblick auf Eigenschaften der besten und echten besten Simultanapproximationen (vgl. § 5 und § 6).

Mit Hilfe eines Charakterisierungssatzes für eine echte beste Simultanapproximation können wir insbesondere für die Approximation bezüglich eines nicht notwendig endlichdimensionalen Teilraums V von $C^1([a,b],\mathbb{R})$ und bezüglich der Abbildung

$$A: \quad C^1([a,b],\mathbb{R}) \ni f \longrightarrow Af := f' \in C([a,b],\mathbb{R})$$

ein Ergebnis ableiten, welches im Spezialfall eine von MOURSUND[37] bewiesene Charakterisierungsaussage impliziert.

Herrn Prof. Dr. Werner Haußmann danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit, für viele lehrreiche Diskussionen und wertvolle Ratschläge, Herrn Dr. Hans-Bernd Knoop für zahlreiche nützliche Hinweise bei der Niederschrift der Arbeit.

Kapitel I Charakterisierung von Minimallösungen durch die Verschärfte Verallgemeinerte Globale Kolmogoroff-Bedingung

§ 0 Grundlegende Bezeichnungen

Die Klasse der Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K}$ der reellen ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$) beziehungsweise der komplexen Zahlen ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$) bezeichnen wir mit $VR(\mathbb{K})$. Ist $X \in VR(\mathbb{K})$ mit einer hausdorffschen lokalkonvexen Topologie versehen, so schreiben wir $X \in LKR(\mathbb{K})$, und unter $NVR(\mathbb{K})$ verstehen wir stets die Klasse der normierten Vektorräume über $\mathbb{K}$.

Eine Abbildung F von $X \in VR(\mathbb{K})$ in $\mathbb{R}$ heißt konvexes Funktional, sofern

$$F(t\cdot x + (1-t)\cdot y) \leq t\cdot F(x) + (1-t)\cdot F(y)$$

für alle $x,y \in X$ und $t \in [0,1]$ gilt. Ein Element L des algebraischen Dualraums X^* von $X \in VR(\mathbb{K})$ nennen wir Subgradient des konvexen Funktionals F in $y \in X$, falls die Ungleichung

$$\mathrm{Re}\ L(x-y) \leq F(x) - F(y)$$

für alle $x \in X$ erfüllt ist (siehe HOLMES[26]). Nach BRECKNER[3] ist die Menge $\partial F(y)$ der Subgradienten von F in y eine nichtleere konvexe Teilmenge von X^*.

Eine Abbildung F von $X \in VR(\mathbb{K})$ in $\mathbb{R}$ heißt sublineares Funktional, falls

(i) $F(x+y) \leq F(x)+F(y)$ für alle $x,y \in X$ und

(ii) $F(tx) = t\cdot F(x)$ für alle $x \in X$ und $t>0$

gilt. Die Menge der sublinearen Funktionale auf X bezeichnen wir mit SF(X). Ist F ein stetiges sublineares Funktional auf $X \in LKR(\mathbb{K})$, so schreiben wir auch $F \in SSF(X)$.

Definieren wir für $X \in VR(\mathbb{K})$ und $F \in SF(X)$ die Menge

$$S_X^* := \{ L \in X^* : \operatorname{Re} L(x) \leq F(x) \text{ für alle } x \in X \},$$

so ist

$$\partial F(y) = \{ L \in S_X^* : \operatorname{Re} L(y) = F(y) \}$$

für jedes $y \in X$. Für $X \in LKR(\mathbb{K})$ und $F \in SSF(X)$ ist $\partial F(y)$ eine Teilmenge des topologischen Dualraums X' von X, und mit $S_{X'} := S_X^* \cap X'$ gilt

$$\partial F(y) = \{ L \in S_{X'} : \operatorname{Re} L(y) = F(y) \} \neq \emptyset$$

für jedes $y \in X$. Für eine Norm F auf $X \in NVR(\mathbb{K})$ (wir schreiben dafür $F \in N(X)$) erhalten wir

$$\partial F(y) = \{ L \in S_{X'} : L(y) = F(y) \} .$$

Topologische Eigenschaften von Mengen und Abbildungen bezüglich der schwachen Topologie auf X' werden wir stets mit dem Präfix "$\sigma(X',X)$" und bezüglich der Relativtopologie der schwachen Topologie auf $M \subset X'$ mit "$\sigma_M(X',X)$" versehen.

Nach HOLMES[26] gilt der folgende

Satz 0.1

Für $X \in LKR(\mathbb{K})$, $x \in X$ und ein stetiges konvexes Funktional F auf X ist $\partial F(x)$ eine nichtleere $\sigma(X',X)$-kompakte konvexe Teilmenge von X'.

Ein Element x einer nichtleeren Teilmenge M von $X \in VR(\mathbb{K})$ heißt Extremalpunkt von M (vgl. DUNFORD-SCHWARTZ[18]), falls zu $m_1, m_2 \in M$ $(m_1 \neq m_2)$ kein $t \in (0,1)$ mit

$$x = tm_1 + (1-t)m_2$$

existiert. Die Menge der Extremalpunkte von $M \subset X$ bezeichnen wir mit EP(M). Für diese Menge gilt der

Satz 0.2 (vgl. DUNFORD-SCHWARTZ[18])

Für jede nichtleere kompakte Teilmenge M von $X \in LKR(\mathbb{K})$ ist $EP(M) \neq \emptyset$.

Ist $X \in VR(\mathbb{K})$ und $F \in SF(X)$, so definieren wir für $y \in X$ und $r > 0$ die Menge

$$U_F(y,r) := \{ x \in X : F(x - y) < r \} .$$

Ferner benutzen wir die Bezeichnungen con M für die konvexe und $\overline{M}$ für die abgeschlossene Hülle der Menge $M \subset X$.

Eine Teilmenge M von $X \in VR(\mathbb{K})$ heißt Kegel mit dem Scheitel $x \in X$, falls mit $y \in M$ und $t > 0$ auch $x + t(y - x) \in M$ ist. Einen Scheitel x nennen wir Spitze des Kegels M, sofern x in M enthalten ist.

Ist Q ein kompakter Hausdorffraum und $X \in NVR(\mathbb{K})$, so versehen wir den Vektorraum C(Q,X) der stetigen Abbildungen von Q nach X stets mit der Supremumsnorm

$$\| f \| := \sup_{q \in Q} \| f(q) \| \quad \text{für } f \in C(Q,X) .$$

§ 1 Die Verschärfte Verallgemeinerte Globale Kolmogoroff-Bedingung

Gegeben seien $X \in VR(\mathbb{K})$ und eine nichtleere Teilmenge V von X. $v_0 \in V$ heißt eine Minimallösung für $f \in X$ (oder auch beste Approximation an f) bezüglich $F \in SF(X)$ und V, falls

$$F(v_0 - f) \not\leq F(v - f) \quad \text{für alle } v \in V$$

gilt. Mit $B(f,V,F)$ bezeichnen wir die Menge der besten Approximationen an f.

Im folgenden interessieren wir uns insbesondere für die Charakterisierung von Minimallösungen. Daher werden wir die Existenz einer besten Approximation voraussetzen. Eine stets hinreichende Bedingung für eine Minimallösung gibt das folgende

Lemma 1.1 (BRECKNER[3])
Es sei $X \in VR(\mathbb{K})$, $F \in SF(X)$, v_0 ein Element einer nichtleeren Teilmenge V von X und $f \in X$.
Gibt es dann zu jedem $v \in V$ ein $L_v \in \partial F(v_0 - f)$ mit

$$\operatorname{Re} L_v(v_0 - v) \not\leq 0 ,$$

so ist $v_0 \in B(f,V,F)$.

In Anlehnung an BROSOWSKI[10] treffen wir die

Definition 1.2

Die nichtleere Teilmenge V von $X \in VR(\mathbb{K})$ erfüllt die Verallgemeinerte Globale Kolmogoroff-Bedingung (VGKB) in $v_o \in V$ bezüglich $f \in X$ und $F \in SF(X)$, falls gilt:
Zu jedem $v \in V$ existiert ein $L_v \in \partial F(v_o - f)$ mit

$$\operatorname{Re} L_v(v_o - v) \not\leq 0 .$$

Wir nennen V eine Kolmogoroff-Menge 1. Art in $v_o \in V$ bezüglich F, falls für alle $f \in X$ gilt:
Ist $v_o \in B(f,V,F)$, so erfüllt V die VGKB in v_o bezüglich f und F.

Das folgende Lemma dient zur Herleitung einer äquivalenten Form der VGKB für $X \in LKR(\mathbb{K})$ und $F \in SSF(X)$.

Lemma 1.3

Ist $X \in LKR(\mathbb{K})$ und M eine nichtleere $\sigma(X',X)$-kompakte Teilmenge von X', so ist für alle $x \in X$

$$\inf_{L \in M} \operatorname{Re} L(x) = \min_{L \in M} \operatorname{Re} L(x) = \min_{L \in EP(M)} \operatorname{Re} L(x) .$$

Beweis:

Die Aussage von Satz 0.2 impliziert $EP(M) \neq \emptyset$. Die Gültigkeit der ersten Gleichung folgt aus der $\sigma(X',X)$-Stetigkeit der Abbildung

$$X' \ni L \longrightarrow \operatorname{Re} L(x) \in \mathbb{R} .$$

Auf Grund der $\sigma(X',X)$-Kompaktheit von M gibt es ein $L_o \in M$ mit

$$\operatorname{Re} L_o(x) = a := \min_{L \in M} \operatorname{Re} L(x) .$$

Daher ist $M_o := \{ L \in M : \operatorname{Re} L(x) = a \}$ eine nichtleere $\mathcal{G}(X',X)$-kompakte Teilmenge von X'. Sei nun $L \in EP(M_o)$. Aus der Annahme $L \notin EP(M)$ folgern wir die Existenz von verschiedenen Elementen $L_1, L_2 \in M$, so daß

$$L = tL_1 + (1 - t)L_2$$

für ein $t \in (0,1)$ gilt. Ohne Einschränkung sei $L_1 \notin M_o$. Daher gilt $\operatorname{Re} L_1(x) > a$, und die Ungleichung

$$a > t \cdot a + (1 - t) \operatorname{Re} L_2(x)$$

impliziert im Widerspruch zur Voraussetzung $a > \operatorname{Re} L_2(x)$. Folglich existiert ein $L \in EP(M)$ mit

$$\operatorname{Re} L(x) = \min_{L \in M} \operatorname{Re} L(x) . \quad \square$$

Bemerkung 1.4

Unter den Voraussetzungen von Lemma 1.3 gilt entsprechend

$$\sup_{L \in M} \operatorname{Re} L(x) = \max_{L \in M} \operatorname{Re} L(x) = \max_{L \in EP(M)} \operatorname{Re} L(x) .$$

Aus Lemma 1.3 folgt mit Satz 0.1 das

Korollar 1.5

Ist $X \in LKR(\mathbb{K})$ und F ein stetiges konvexes Funktional auf X, so sind für $V \subset X$, $v_o \in V$ und $f \in X$ die folgenden Aussagen äquivalent :

(i) Zu $v \in V$ gibt es ein $L_v \in \partial F(v_o - f)$ mit $\operatorname{Re} L_v(v_o - v) \leq 0$.

(ii) Zu $v \in V$ gibt es ein $L_v \in EP(\partial F(v_o - f))$ mit $\operatorname{Re} L_v(v_o - v) \leq 0$.

Für einen kompakten Hausdorffraum Q sind die Elemente von $EP(S_{C(Q,\mathbb{C})'})$ die Punktfunktionale (vgl. DUNFORD-SCHWARTZ [18]). Daher erfüllt eine Teilmenge V von $C(Q,\mathbb{C})$ genau dann die VGKB in $v_o \in V$ bezüglich $f \in C(Q,\mathbb{C})$ und der Supremumsnorm $\|.\|$, falls zu jedem Element v von V ein $q_v \in m(v_o - f) := \{ q \in Q : |(v_o - f)(q)| = \|v_o - f\| \}$ mit

$$\operatorname{Re}\ \overline{(v_o(q_v) - f(q_v))} \cdot (v_o(q_v) - v(q_v)) \leq 0$$

existiert. Diese Bedingung ist die von KOLMOGOROFF [30] angegebene Eigenschaft (KB).

Bei der Untersuchung derjenigen Punkte v_o einer Menge $V \subset X$, für welche V eine Kolmogoroff-Menge 1. Art bezüglich eines $F \in SF(X)$ ist, spielt der Begriff des solaren Punktes eine zentrale Rolle.

Definition 1.6

Ist $X \in VR(\mathbb{K})$, $F \in SF(X)$ und V eine nichtleere Teilmenge von X, so heißt $v_o \in V$ solarer Punkt von V bezüglich F, sofern für jedes $f \in X$ aus $v_o \in B(f,V,F)$ auch

$$v_o \in B(tf + (1 - t)v_o, V, F) \quad \text{für alle } t \geq 1$$

folgt.

Beim Beweis der Konvexität von speziellen Čebyšev-Mengen in flachkonvexen und striktkonvexen Banachräumen wurden von EFIMOV und STEČKIN[21] solare Punkte, welche auf Grund einer Definition bei KLEE[28] in der Literatur auch häufig α-solar genannt werden, zum ersten Mal erfolgreich benutzt. Eine ähnlich zentrale Rolle spielt der Begriff des solaren Punktes auch bei der von BRAESS[2] angegebenen Charakterisierung von speziellen Čebyšev-Mengen in $C(Q,\mathbb{R})$ (Q kompakt).

Wichtige Beispiele für solare Punkte gibt der

Satz 1.7

Ist V eine bezüglich $v_o \in V$ sternförmige Teilmenge von $X \in VR(\mathbb{K})$, so ist v_o ein solarer Punkt von V bezüglich $F \in SF(X)$.

Beweis:

Sei $v \in V$, $t \geq 1$ und $v_o \in B(f,V,F)$ für ein $f \in X$. Wegen der Sternförmigkeit von V bezüglich v_o ist $v_o + \frac{1}{t}\cdot(v - v_o) \in V$. Die Abschätzung

$$F(v_o - (tf + (1 - t)\cdot v_o)) = t\cdot F(v_o - f)$$
$$\leq t\cdot F(v_o + \tfrac{1}{t}\cdot(v - v_o) - f) = F(v - (tf + (1 - t)\cdot v_o))$$

impliziert $v_o \in B(tf + (1 - t)\cdot v_o, V, F)$. □

Bemerkung 1.8

(i) Diese Aussage wurde von BROSOWSKI[10] für $X \in NVR(\mathbb{K})$

und $F \in N(X)$ nachgewiesen.

(ii) Insbesondere ist jeder Punkt einer konvexen Menge V solarer Punkt von V bezüglich jedes $F \in SF(X)$.

Eine Charakterisierung derjenigen Punkte $v_o \in V$, für welche V eine Kolmogoroff-Menge 1. Art bezüglich eines sublinearen Funktionals ist, behandelt der folgende

Satz 1.9 (BRECKNER[3])
Für $X \in VR(\mathbb{K})$ ist ein Element v_o einer nichtleeren Teilmenge V von X genau dann ein solarer Punkt von V bezüglich $F \in SF(X)$, falls V eine Kolmogoroff-Menge 1. Art in v_o bezüglich F ist.

Ist darüberhinaus V eine konvexe Teilmenge von X, so gilt der folgende die Charakterisierungsaussagen von SINGER[38], CHOQUET[15] und HAVINSON[23] verallgemeinernde

Satz 1.10 (BRECKNER[3])
Ist V eine nichtleere konvexe Teilmenge von $X \in VR(\mathbb{K})$, $v_o \in V$ und $f \in X$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $v_o \in B(f,V,F)$.

(ii) Es gibt ein von $v \in V$ unabhängiges $L \in \partial F(v_o - f)$ mit
$\operatorname{Re} L(v_o - v) \not< 0$ für alle $v \in V$.

Dabei ist die Implikation von (ii) nach (i) stets erfüllt,

was wir direkt aus der für jedes $v \in V$ geltenden Ungleichung

$$F(v_o - f) = \operatorname{Re} L(v_o - f) = \operatorname{Re} L(v_o - v) + \operatorname{Re} L(v - f)$$
$$\leq \operatorname{Re} L(v - f) \leq F(v - f)$$

folgern können.
Es stellt sich daher die Frage, in wieweit die Voraussetzung der Konvexität von V abgeschwächt werden kann, um (ii) aus (i) weiterhin schließen zu können. Daher liefert Satz 1.10 die Motivation für die

Definition 1.11
Eine nichtleere Teilmenge V von $X \in VR(\mathbb{K})$ erfüllt die Verschärfte Verallgemeinerte Globale Kolmogoroff-Bedingung (VVGKB) in $v_o \in V$ bezüglich $f \in X$ und $F \in SF(X)$, falls ein von $v \in V$ unabhängiges $L \in \partial F(v_o - f)$ mit

$$\operatorname{Re} L(v_o - v) \leq 0 \quad \text{für alle } v \in V$$

existiert.

Im folgenden fragen wir bei gegebenem $f \in X$ daher nach Bedingungen an $v_o \in V \subset X$, welche die Äquivalenz von $v_o \in B(f,V,F)$ und der VVGKB von V in v_o bezüglich f und F implizieren. Einen Versuch in diese Richtung haben BRECKNER und KOLUMBAN[5] gemacht. Sie vermuteten nämlich für $X \in NVR(\mathbb{K})$ die Gültigkeit der folgenden Aussage :

(1.1) Ist V eine in $v_0 \in V$ (B&K)-reguläre Teilmenge von X und $f \in X \setminus \overline{\text{con } V}$, so ist $v_0 \in B(f,V,\|\cdot\|)$ genau dann, falls V die VVGKB in v_0 bezüglich f und $\|\cdot\|$ erfüllt.

Dabei heißt eine nichtleere Teilmenge V von $X \in NVR(\mathbb{K})$ (B&K)-regulär in $v_0 \in V$ (d.h. regulär im Sinne von BRECKNER und KOLUMBAN[5]), falls für jedes $v \in V$ und jede nichtleere Teilmenge W von $EP(S_{X'})$, für jedes $f \in X$, für welche

$$\text{Re } L(v - v_0) \geq a > 0 \quad \text{und} \quad L(f - v_0) \geq b > 0$$

für alle $L \in W$ gilt, sowie für jede reelle Zahl $t > 0$ ein $v_t \in V$ mit

(1.2) $|L(f - v_t)| < L(f - v_0)$ für alle $L \in W$ und

(1.3) $\|v_t - v_0\| < t$

existiert.

Die Vermutung (1.1) erwies sich leider als nicht richtig, wie von BRECKNER und BROSOWSKI[4] mit folgendem Beispiel gezeigt wurde :

Für $X = \mathbb{R}^2$ sei N die Maximumnorm auf X. Die Teilmenge

$$V = \{(0,0)\} \cup \left[\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(x,y) : x,y \geq 0\}\right]$$

von X ist in $v_0 = (0,0)$ (B&K)-regulär, und v_0 ist beste Approximation an $f = (1,1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\text{con } V}$. Da die Menge $\partial N(-f)$ mit der Menge

$$\{ (-(a + 1), a) : a \in [-1,0] \}$$

übereinstimmt, kann die Ungleichung

$$- (a + 1)\cdot x + a\cdot y \geq 0$$

nicht für ein $a \in [-1,0]$ und alle $(x,y) \in V$ erfüllt sein. Daher verletzt V in v_o die VVGKB. Nach den Sätzen 1.7 und 1.9 erfüllt V jedoch die VGKB, und wir können zu jedem $(x,y) \in V$ ein $a \in [-1,0]$ mit

$$- (a + 1)\cdot x + a\cdot y \geq 0$$

finden.

Der Begriff der (B&K)-Regularität ist mit dem von BROSOWSKI und WEGMANN [13] eingeführten Regularitätsbegriff verwandt.

Eine nichtleere Teilmenge V von $X \in NVR(\mathbb{K})$ heißt regulär in $v_o \in V$ (bezüglich $N \in N(X)$), falls für alle $f \in X \setminus V$, für alle $v \in V$, für jede reelle Zahl $t > 0$ und für jede die Menge $EP(\partial N(v_o - f))$ enthaltende $\sigma_{EP(S_{X'})}(X',X)$-abgeschlossene Teilmenge W von $EP(S_{X'})$ mit

$$\text{Re } L(v_o - v) > 0 \quad \text{für alle } L \in W$$

ein $v_t \in V$ mit den folgenden Eigenschaften existiert :

(1.4) $\text{Re } L(v_o - v_t) > \text{Re } L(v_o - f) - \| v_o - f \|$ für $L \in W$.

(1.5) $\| v_t - v_o \| < t$.

Für $X \in NVR(\mathbb{K})$ haben BROSOWSKI und WEGMANN[13] die folgende Charakterisierung einer in $v_0 \in V$ regulären Menge $V \subset X$ angegeben :

(1.6) V ist genau dann regulär in $v_0 \in V$, falls v_0 ein solarer Punkt von V bezüglich $\|\cdot\|$ ist.

Während für Teilmengen $V \subset C(Q,\mathbb{R})$ (Q kompakter Hausdorffraum) Regularität und (B&K)-Regularität zusammenfallen (vgl. BRECKNER-KOLUMBAN[5]), gilt für beliebige normierte Vektorräume lediglich

Satz 1.12

Jede in $v_0 \in V$ (B&K)-reguläre Teilmenge V von $X \in NVR(\mathbb{K})$ ist regulär in v_0.

Beweis:

Wir zeigen, daß v_0 solarer Punkt von V bezüglich der Norm N ist. Es sei $f \in X$, $v_0 \in B(f,V,N)$ und ohne Einschränkung gelte $f \neq v_0$.
Angenommen, es existiert ein $t \geq 1$ mit $v_0 \notin B(tf + (1-t)\cdot v_0, V, N)$.
Nach Lemma 1.1 gibt es ein $v \in V$ mit

$$\operatorname{Re} L(v_0 - v) > 0 \quad \text{für alle } L \in \partial N(v_0 - (tf + (1-t)\cdot v_0)).$$

Wegen

$$\partial N(v_0 - f) = \partial N(v_0 - (tf + (1-t)\cdot v_0))$$

gilt $\operatorname{Re} L(v_0 - v) > 0$ für alle $L \in \partial N(v_0 - f)$, und nach Satz 0.1 gibt es ein $a > 0$ mit

(1.7) $\quad \operatorname{Re} L(v - v_o) \geq a \quad$ für alle $L \in \partial N(f - v_o)$.

Definieren wir die Menge

$$G := \left\{ L \in EP(S_{X'}) : \operatorname{Re} L(v - v_o) \geq \frac{a}{2} \, , \; L(f - v_o) > \frac{1}{2} \cdot \| f - v_o \| \right\} ,$$

so gilt $\emptyset \neq G \subset EP(S_{X'})$.

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so fassen wir X als reellen Vektorraum auf und bezeichnen diesen Raum mit $X_{\mathbb{R}}$. Jedes $L \in X'$ läßt sich in der Form

$$L(x) = l(x) - i \cdot l(ix) \quad \text{mit } l \in X_{\mathbb{R}}'$$

darstellen, und es gilt $L \in S_{X'}$ genau dann, wenn $l \in S_{X_{\mathbb{R}}'}$ ist (siehe KÖTHE[29]). Für die Menge

$$G_{\mathbb{R}} := \left\{ l \in EP(S_{X_{\mathbb{R}}'}) : l(v - v_o) \geq \frac{a}{2} \, , \; l(f - v_o) > \frac{1}{2} \cdot \| f - v_o \| \right\}$$

gilt

$$\emptyset \neq G_{\mathbb{R}} \subset EP(S_{X_{\mathbb{R}}'}) .$$

Im folgenden zeigen wir

(1.8) $\quad b := \sup_{l \in EP(S_{X_{\mathbb{R}}'}) \setminus G_{\mathbb{R}}} l(f - v_o) < \| f - v_o \| .$

Angenommen, es ist $b = \| f - v_o \|$.

Die Existenz eines $l \in EP(S_{X_{\mathbb{R}}'}) \setminus G_{\mathbb{R}}$ mit $l(f - v_o) = \| f - v_o \|$ liefert einen Widerspruch zu (1.7). Daher gibt es eine Folge $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von verschiedenen Elementen aus $EP(S_{X_{\mathbb{R}}'}) \setminus G_{\mathbb{R}}$ mit

$$\lim_{n \to \infty} l_n(f - v_o) = \| f - v_o \| .$$

Wegen der $\sigma(X_{\mathbb{R}}', X_{\mathbb{R}})$-Kompaktheit von $S_{X_{\mathbb{R}}'}$ hat die Menge

$\{l_n : n \in \mathbb{N}\}$ einen $\mathcal{G}(X_{\mathbb{R}}', X_{\mathbb{R}})$-Häufungspunkt $l_o \in S_{X_{\mathbb{R}}'}$.
Aus Stetigkeitsgründen ist dann $l_o(f - v_o)$ Berührungspunkt von $M := \{l_n(f - v_o) : n \in \mathbb{N}\}$.

Ist $l_o(f - v_o)$ isolierter Punkt von M, so gibt es genau ein $m \in \mathbb{N}$ mit $l_o(f - v_o) = l_m(f - v_o)$, und folglich kann l_o kein $\mathcal{G}(X_{\mathbb{R}}', X_{\mathbb{R}})$-Häufungspunkt von $\{l_n : n \in \mathbb{N}\}$ sein.

Also ist $l_o(f - v_o)$ Häufungspunkt von M. Ohne Einschränkung gilt

$$l_o(f - v_o) = \lim_{n \to \infty} l_n(f - v_o) = \| f - v_o \| .$$

Es gibt daher ein $n_o \in \mathbb{N}$ mit

$$(1.9) \qquad l_n(f - v_o) > \frac{1}{2} \| f - v_o \| \quad \text{für alle } n \geq n_o .$$

Aus $l_o(f - v_o) = \| f - v_o \|$ und $l_o \in S_{X_{\mathbb{R}}'}$ folgt nach (1.7)

$$l_o(v - v_o) \geq a > 0 .$$

Andererseits impliziert (1.9) und $l_n \in EP(S_{X_{\mathbb{R}}'}) \setminus G_{\mathbb{R}}$

$$l_n(v - v_o) < \frac{a}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_o .$$

Wegen

$$0 < \frac{a}{2} \leq |(l_o - l_n)(v - v_o)| \quad \text{für alle } n \geq n_o$$

wäre l_o kein $\mathcal{G}(X_{\mathbb{R}}', X_{\mathbb{R}})$-Häufungspunkt von $\{l_n : n \in \mathbb{N}\}$, und damit ist die Gültigkeit von (1.8) nachgewiesen.

Ohne Einschränkung sei t so groß, daß

$$0 < \frac{1}{t} < \| f - v_o \| - b$$

gilt. Wegen der (B&K)-Regularität gibt es ein $v_t \in V$ mit

$$\| v_t - v_o \| < \frac{1}{t} \quad ,$$

und für alle $L \in G$ gilt

$$\text{Re } L(f - v_t) \leq |L(f - v_t)| < L(f - v_o) \leq \| f - v_o \| .$$

Alle $l \in G_R$ erfüllen folglich $l(f - v_t) < \| f - v_o \|$.
Für jedes $l \in EP(S_{X_R},) \setminus G_R$ gilt

$$l(f - v_t) = l(f - v_o) + l(v_o - v_t) \leq b + \| v_o - v_t \|$$
$$< \| f - v_o \| - \frac{1}{t} + \frac{1}{t} = \| f - v_o \| ,$$

und daher ist

$$l(f - v_t) < \| f - v_o \| \quad \text{für alle } l \in EP(S_{X_R},) .$$

Im Widerspruch zur Voraussetzung $v_o \in B(f,V,N)$ folgt aus Bemerkung 1.4

$$\| f - v_t \| < \| f - v_o \| ,$$

und die Anwendung von (1.6) liefert die Behauptung. ⌋

Bemerkung 1.13

Einige Teile des Beweises von Satz 1.12 gehen auf den von BRECKNER und KOLUMBAN[5] geführten Nachweis zurück, daß jede in $v_o \in V$ (B&K)-reguläre Menge V eine Kolmogoroff-Menge 1. Art in v_o ist. Wie BRECKNER und BROSOWSKI[4] anmerkten, wurde jedoch irrtümlicherweise angenommen, daß

die Menge S_X, stets folgenkompakt ist. Wir haben beim Nachweis von Satz 1.12 insbesondere einen elementaren Beweis für die Gültigkeit der Ungleichung (1.8) angegeben.

Ein Beispiel von BROSOWSKI und WEBER[12] zeigt, daß die Umkehrung der Aussage von Satz 1.12 im allgemeinen nicht richtig ist.

Im Zusammenhang mit Fragestellungen im Rahmen der Simultanapproximation werden wir auf den Regularitätsbegriff von BROSOWSKI und WEGMANN zurückkommen.

§ 2 Projektions- und Tangentialkegel

In den folgenden Betrachtungen wollen wir stets voraussetzen, daß $X \in VR(\mathbb{K})$ und $F \in SF(X)$ ist. Mit Hilfe von Projektionskegeln werden wir für Elemente v_o einer Teilmenge V von X eine Bedingung dafür angeben, daß für ein $f \in X$ die Gültigkeit der VVGKB von V in v_o bezüglich f und F charakteristisch für $v_o \in B(f,V,F)$ ist und damit Satz 1.10 verallgemeinert. Dabei gehen wir aus von der

Definition 2.1 (vgl. KÖTHE[29])
Unter dem Projektionskegel $PK(x,M)$ der Menge $M \subset X$ von $x \in X$ aus verstehen wir den kleinsten Kegel mit der Spitze x, welcher M enthält, d.h.

$$PK(x,M) = \{ x + t\cdot(y - x) : t \geq 0,\ y \in M \}.$$

Für konvexe Projektionskegel gilt

Satz 2.2
Es sei $v_o \in V$ ein solarer Punkt der nichtleeren Teilmenge V von X bezüglich F und $PK(v_o,V)$ eine konvexe Menge. Dann ist v_o genau dann eine Minimallösung für $f \in X$, falls V die VVGKB in v_o bezüglich f und F erfüllt.

Beweis:
Sei $f \in X$, $v_o \in B(f,V,F)$ und $x \in PK(v_o,V)$. Dann gibt es ein $v \in V$ und ein $t \geq 0$ mit $x = v_o + t\cdot(v - v_o)$.

Für $t > 1$ ergibt sich wegen $1 - \frac{1}{t} \in (0,1)$

$$\frac{1}{t}\cdot F(v_o - f) = F(v_o - f) - F((1 - \tfrac{1}{t})\cdot(v_o - f))$$

$$\leq F(v - f) - F((1 - \tfrac{1}{t})\cdot(v_o - f))$$

$$\leq F(v - f - (1 - \tfrac{1}{t})\cdot(v_o - f)) = F(v - (\tfrac{1}{t}f + (1 - \tfrac{1}{t})\cdot v_o)),$$

und folglich gilt $F(v_o - f) \leq F(x - f)$.

Da v_o solarer Punkt von V bezüglich F ist, folgt für $t \in (0,1]$ die Abschätzung :

$$\frac{1}{t}\cdot F(v_o - f) = F(v_o - (\tfrac{1}{t}\cdot f + (1 - \tfrac{1}{t})\cdot v_o))$$

$$\leq F(v - (\tfrac{1}{t}\cdot f + (1 - \tfrac{1}{t})\cdot v_o)) ,$$

und daher gilt

$$F(v_o - f) \leq F(v_o + t\cdot(v - v_o) - f) = F(x - f) .$$

Somit ist $v_o \in B(f,PK(v_o,V),F)$, und auf Grund der Konvexität von $PK(v_o,V)$ ergibt sich nach Satz 1.10 die Existenz eines $L \in \partial F(v_o - f)$ mit $\operatorname{Re} L(v_o - x) \leq 0$ für alle $x \in PK(v_o,V)$.

Wegen $V \subset PK(v_o,V)$ gilt insbesondere

$$\operatorname{Re} L(v_o - v) \leq 0 \quad \text{für alle } v \in V,$$

d.h. V erfüllt in v_o die VVGKB bezüglich f und F. □

Bemerkung 2.3

Jedes Element v_o einer konvexen Menge $V \subset X$ ist nach Bemerkung 1.8(ii) ein solarer Punkt von V bezüglich F.

Da ferner $PK(v_o,V)$ konvex ist, implizieren die Voraussetzungen von Satz 1.10 die von Satz 2.2. Das folgende Beispiel zeigt, daß Satz 2.2 die Aussage von Satz 1.10 echt verallgemeinert.:

Mit $v_o = (0,0)$, $v_1 = (1,0)$ und $v_2 = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ sei
$V = \{t_1v_1+t_2v_2 : t_1+t_2 \leq 1,\ t_1,t_2 \geq 0\} \cup \{t \cdot v_1 : t \in [0,2]\}$.
V ist eine nichtkonvexe bezüglich $v_o \in V$ sternförmige Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Nach Satz 1.7 ist v_o ein solarer Punkt von V bezüglich jedes $F \in SF(\mathbb{R}^2)$. Wegen der Konvexität von $PK(v_o,V)$ sind die Voraussetzungen von Satz 2.2 erfüllt.

Bemerkung 2.4

Falls $v_o = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ Minimallösung für ein $f \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Menge $V = \{(x,|x|) : x \in [-1,1]\}$ und der Maximumnorm des $\mathbb{R}^2$ ist, läßt sich dies sicherlich durch die VVGKB charakterisieren, obwohl $PK(v_o,V)$ keine konvexe Menge ist.

Unser Ziel wird daher die Gewinnung einer weiteren hinlänglichen Bedingung für die zur Diskussion stehende Charakterisierungsaussage sein, welche insbesondere eine Aussage für die in Bemerkung 2.4 betrachtete Situation zuläßt.
Dazu benötigen wir den Begriff des Tangentialkegels, den wir in Anlehnung an BROSOWSKI[10], DUBOVITSKII-MILYUTIN[17] und LAURENT[35] (welche den normierten Fall behandeln) einführen. Mit Hilfe dieses Kegels werden wir in §3 insbe-

sondere die Charakterisierung der sogenannten Kolmogoroff-Mengen 2. Art für den Fall $X \in VR(\mathbb{K})$ und $F \in SF(X)$ angeben können.

Definition 2.5

Ist v_o Element der nichtleeren Teilmenge V von X, so bezeichnen wir mit $K_F(v_o,V)$ die Menge derjenigen Elemente $v_o + z \in X$, für welche

$$V \cap \bigcup_{0<a<\varepsilon} (v_o + a \cdot U_F(z,r)) \neq \emptyset$$

für jedes $r > 0$ und $\varepsilon > 0$ gilt.

Für $X \in NVR(\mathbb{K})$ und $N \in N(X)$ entspricht $K_N(v_o,V)$ der von BROSOWSKI [11] gegebenen Definition der "Linearisierung von V in v_o". Wie BROSOWSKI [11] für $X \in NVR(\mathbb{K})$ und $F \in N(X)$ angemerkt hat, läßt sich für die Menge $K_F(v_o,V)$ die folgende Aussage nachweisen :

Lemma 2.6

Für jede Teilmenge V von X und für jedes $v_o \in V$ ist $K_F(v_o,V)$ ein nichtleerer Kegel mit der Spitze v_o.

Beweis:

Offensichtlich ist $v_o \in K_F(v_o,V)$. Seien nun $t > 0$, $v_o + z \in K_F(v_o,V)$, $r > 0$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu $r_1 := \frac{r}{t}$ und $\varepsilon_1 := t \cdot \varepsilon$ gibt es ein $a_1 \in (0, \varepsilon_1)$ und $y_1 \in U_F(z,r_1)$ mit $v_o + a_1 \cdot y_1 \in V$. Mit $a := \frac{1}{t} \cdot a_1 \in (0, \varepsilon)$ und $y := t \cdot y_1$

folgt dann

$$F(y - t\cdot z) = t\cdot F(y_1 - z) < t\cdot r_1 = r$$

und $v_o + a\cdot y = v_o + a_1\cdot y_1 \in V$.
Also ist $v_o + t\cdot z \in K_F(v_o,V)$, und daher ist die Kegeleigenschaft von $K_F(v_o,V)$ nachgewiesen. ⌋

Bemerkung 2.7

Für $v_o = (0,-1) \in \mathbb{R}^2$, $V = \{(x,0):x\in[-1,1]\} \cup \{(0,y):y\in[-1,0]\}$ und die euklidische Norm N des $\mathbb{R}^2$ gilt weder die Inklusion $V \subset K_N(v_o,V)$ noch $K_N(v_o,V) \subset V$.

Anders ist die Situation bei quasisternförmigen Mengen V, die in der folgenden Definition eingeführt werden.

Definition 2.8

$V \subset X$ heißt quasisternförmig bezüglich $v_o \in V$, sofern zu jedem $v \in V$ ein $t_v \in (0,1]$ existiert, so daß für alle $t \in [0,t_v]$ das Element $v_o + t\cdot(v - v_o)$ in V enthalten ist.

Lemma 2.9

Ist $V \subset X$ quasisternförmig bezüglich $v_o \in V$, so gilt $V \subset K_F(v_o,V)$ für jedes $F \in SF(X)$.

Beweis:

Sei $v \in V$, $r > 0$ und $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es ein $t_v \in (0,1]$ mit $v_o + t\cdot(v - v_o) \in V$ für alle $t \in [0,t_v]$.

Mit $y := v - v_o$ gilt dann $F(y - (v - v_o)) = 0 < r$, und für $a \in (0, \min\{\varepsilon, t_v\})$ ist $v_o + a \cdot y \in V$, und folglich gilt $v = v_o + (v - v_o) \in K_F(v_o, V)$. ⌋

Da jede konvexe Menge V bezüglich jedes Elements $v_o \in V$ quasisternförmig ist, erweitert Lemma 2.9 das für $X \in NVR(K)$ erhaltene Ergebnis von BROSOWSKI und WEGMANN [13]. Die Gleichheit der Mengen V und $K_N(v_o, V)$ läßt sich für $X \in NVR(K)$ und $N \in N(X)$ wie folgt charakterisieren :

Satz 2.10

Ist $X \in NVR(K)$, $N \in N(X)$, $V \subset X$ und $v_o \in V$, so gilt $K_N(v_o, V) = V$ genau dann, wenn V ein abgeschlossener Kegel mit der Spitze v_o ist.

Beweis:

Nach Lemma 2.9 gilt für den Kegel V die Inklusion $V \subset K_N(v_o, V)$. Angenommen, es sei $v_o + z \in K_N(v_o, V)$ und $v_o + z \notin V$. Dann gibt es wegen der Abgeschlossenheit von V ein $r_1 > 0$ mit

$$\| v - (v_o + z) \| > r_1 \quad \text{für alle } v \in V .$$

Nach Voraussetzung existiert zu $r \in (0, r_1)$ und zu $\varepsilon > 0$ ein $y \in U_N(z, r)$ und $a \in (0, \varepsilon)$ mit $v_o + a \cdot y \in V$, und daher gilt für ein $v_1 \in V$ dann $a \cdot y = v_1 - v_o$. Also ist

$$v_o + \frac{1}{a} \cdot (v_1 - v_o) = v_o + y \in V ,$$

und folglich

$$r_1 < \| v_o + y - (v_o + z)\| = \| y - z \| < r < r_1 .$$

Dieser Widerspruch impliziert notwendig $v_o + z \in V$, und es gilt $K_N(v_o,V) \subset V$.

Umgekehrt sei nun die Gleichheit $V = K_N(v_o,V)$ für $v_o \in V$ vorausgesetzt. Nach Lemma 2.6 ist V ein Kegel mit der Spitze v_o. Für eine Folge $(v_o + z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Elementen aus $K_N(v_o,V)$ gelte

$$\lim_{n\to\infty} (v_o + z_n) = v_o + z \in X .$$

Zu $r > 0$ gibt es daher ein $m \in \mathbb{N}$ mit $z_m \in U_N(z,r)$. Setzen wir $r_m := r - \| z_m - z \|$, so gilt $U_N(z_m,r_m) \subset U_N(z,r)$.

Wegen $v_o + z_m \in K_N(v_o,V)$ gibt es zu r_m und $\varepsilon > 0$ ein $a \in (0,\varepsilon)$ und ein $y \in U_N(z_m,r_m)$ mit $v_o + a\cdot y \in V$, und es ist $y \in U_N(z,r)$. Also ist $v_o + z \in K_N(v_o,V)$ und daher V abgeschlossen. ⌟

Während im allgemeinen weder die Inklusion $V \subset \operatorname{con} K_F(v_o,V)$ noch die Beziehung $K_F(v_o,\operatorname{con} V) \subset \operatorname{con} K_F(v_o,V)$ gilt (vgl. das Beispiel aus Bemerkung 2.7), können wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 2.11

Für $v_o \in V \subset X$ gilt stets $\operatorname{con} K_F(v_o,V) \subset K_F(v_o,\operatorname{con} V)$.
Ist V quasisternförmig bezüglich v_o, so ist

$$\operatorname{con} K_F(v_o,V) = K_F(v_o,\operatorname{con} V) .$$

Beweis:

Offensichtlich ist $K_F(v_o,V) \subset K_F(v_o,\operatorname{con} V)$.

Wir zeigen zunächst die Konvexität von $K_F(v_o, \text{con } V)$.
Dazu seien $v_o + z_1$, $v_o + z_2 \in K_F(v_o, \text{con } V)$ und $t \in [0,1]$.
Zu $r > 0$ und $\varepsilon > 0$ gibt es für $i=1,2$ ein $y_i \in U_F(z_i, r)$ und $a_i \in (0, \varepsilon)$ mit $v_o + a_i \cdot y_i \in \text{con } V$. Die Konvexität von con V impliziert für $i=1,2$

$$(1 - s)\cdot v_o + s\cdot(v_o + a_i \cdot y_i) \in \text{con } V \quad \text{für alle } s \in [0,1].$$

Mit $a := \min\{a_1, a_2\}$ ist $a \in (0, \varepsilon)$ und für $i=1,2$ ist $v_o + a \cdot y_i \in \text{con } V$. Für $y := ty_1 + (1 - t)y_2$ gilt

$$F(y - (t\cdot z_1 + (1 - t)\cdot z_2)) < r \quad \text{und}$$

$$v_o + a\cdot y = t\cdot(v_o + a\cdot y_1) + (1 - t)\cdot(v_o + a\cdot y_2) \in \text{con } V,$$

und folglich ist $v_o + t\cdot z_1 + (1 - t)\cdot z_2 \in K_F(v_o, \text{con } V)$.
Daher ist $K_F(v_o, \text{con } V)$ konvex, und es gilt

$$\text{con } K_F(v_o, V) \subset K_F(v_o, \text{con } V).$$

Wir weisen jetzt die Inklusion $K_F(v_o, \text{con } V) \subset \text{con } K_F(v_o, V)$ unter der Voraussetzung nach, daß V bezüglich v_o quasi-sternförmig ist.
Zu $v_o + z \in K_F(v_o, \text{con } V)$, $r > 0$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $a \in (0, \varepsilon)$ und $y \in U_F(z, r)$ mit $v_o + a\cdot y \in \text{con } V$. Es existieren daher n (≥ 1) reelle Zahlen $t_i \geq 0$ und n Elemente $v_i \in V$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \quad \text{und} \quad v_o + a\cdot y = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot v_i .$$

Definieren wir $z_i := \frac{1}{a}\cdot(v_i - v_o) + z - y$ für $i=1,\ldots,n$, so gilt $v_o + z_i \in K_F(v_o, V)$ für jedes i.
Sind nämlich für ein i reelle Zahlen $\varepsilon_i > 0$ und $r_i > 0$

vorgegeben, so genügt es die Gültigkeit von

$$v_o + b\cdot z_i \in K_F(v_o,V)$$

für $b := \frac{r_i}{r}$ nachzuweisen. Wegen der Quasisternförmigkeit gibt es zu $v_i \in V$ ein $s_{v_i} \in (0,1]$, so daß $v_o + s\cdot(v_i - v_o) \in V$ für alle $s \in [0,s_{v_i}]$ gilt. Für $y_i := \frac{b}{a}\cdot(v_i - v_o)$ und $a_i \in (0,\min\{\varepsilon_i, s_{v_i}\cdot\frac{a}{b}\})$ folgt wegen $a_i\cdot\frac{b}{a} < s_{v_i}$

$$v_o + a_i\cdot y_i = v_o + a_i\cdot\frac{b}{a}\cdot(v_i - v_o) \in V.$$

Die Abschätzung

$$F(y_i - b\cdot z_i) = F(\tfrac{b}{a}\cdot(v_i - v_o) - b\cdot(\tfrac{1}{a}\cdot(v_i - v_o) + z - y))$$

$$= b\cdot F(y - z) < b\cdot r \leq r_i$$

impliziert $y_i \in U_F(b\cdot z_i, r_i)$, und daher gilt $v_o + b\cdot z_i \in K_F(v_o,V)$. Nach Lemma 2.6 ist $v_o + z_i \in K_F(v_o,V)$, und wegen

$$v_o + z = v_o + \tfrac{1}{a}\cdot(v_o + a\cdot y - v_o) + z - y = \sum_{i=1}^{n} t_i\cdot(v_o + z_i)$$

ist $v_o + z \in \operatorname{con} K_F(v_o,V)$. ⌟

Bemerkung 2.12

Die Menge

$$V = \{(x,x): x \in [0,1]\} \cup \{(x,0): x \in [0,1]\} \cup \{(1,y): y \in [0,1]\}$$

zeigt uns, daß die Quasisternförmigkeit von V bezüglich $v_o = (0,0) \in V$ nicht durch $\operatorname{con} K_F(v_o,V) = K_F(v_o,\operatorname{con} V)$ charakterisiert wird; denn bezüglich der euklidischen Norm N des $\mathbb{R}^2$ gilt $\operatorname{con} K_N(v_o,V) = K_N(v_o,\operatorname{con} V)$, aber V ist sicherlich nicht quasisternförmig bezüglich v_o.

Da im allgemeinen der Kegel $K_F(v_o,V)$ einer bezüglich $v_o \in V$ quasisternförmigen Menge V nicht konvex zu sein braucht, treffen wir im Hinblick auf die Frage nach der Konvexität von $K_F(v_o,V)$ die folgende

Definition 2.13

$V \subset X$ heißt gleichmäßig quasisternförmig bezüglich $v_o \in V$, sofern für alle $v_1,v_2 \in V$ ein $s \in (0,1]$ existiert, so daß $v_o + t\cdot s\cdot(v_1 - v_o) + (1 - t)\cdot s\cdot(v_2 - v_o) \in V$ für alle $t \in [0,1]$ gilt.

Satz 2.14

Die gleichmäßige Quasisternförmigkeit der Menge $V \subset X$ bezüglich $v_o \in V$ ist hinreichend für die Konvexität der Mengen $K_F(v_o,V)$ und $PK(v_o,V)$.

Beweis:

Sind $v_o + z_1$, $v_o + z_2 \in K_F(v_o,V)$ und $t \in [0,1]$, so gibt es zu $\varepsilon > 0$ und $r > 0$ für i=1,2 ein $a_i \in (0,\min\{\varepsilon,1\})$ und $y_i \in U_F(z_i,r)$ mit

$$v_o + a_i\cdot y_i \in V \ .$$

Wegen der Quasisternförmigkeit von V bezüglich v_o gibt es zu $v_o + a_1y_1$ und $v_o + a_2y_2$ reelle Zahlen $d_1,d_2 \in (0,1]$ mit $v_o + d\cdot a_i\cdot y_i \in V$ für alle $d \in [0,d_i]$ und i=1,2. Mit $a := \min\{a_1d_1,a_2d_2\}$ gilt dann

$$v_o + a\cdot y_i \in V \quad \text{für } i = 1,2 \ .$$

Nach Voraussetzung gibt es zu $v_o + a\cdot y_1$ und $v_o + a\cdot y_2$

ein $s \in (0,1]$, so daß $v_o + c \cdot s \cdot a \cdot y_1 + (1 - c) \cdot s \cdot a \cdot y_2 \in V$ für alle $c \in [0,1]$ gilt. Dann ist insbesondere

$$v_o + s \cdot a \cdot (t \cdot y_1 + (1 - t) \cdot y_2) \in V ,$$

und mit $y := t \cdot y_1 + (1 - t) \cdot y_2$ folglich $v_o + a \cdot s \cdot y \in V$. Ferner gilt

$$0 < s \cdot a \leq a = \min \{a_1 \cdot d_1, a_2 \cdot d_2\} \leq a_1 < \varepsilon ,$$

und die Ungleichung $F(y - (t \cdot z_1 + (1 - t) \cdot z_2)) < r$ impliziert $t \cdot (v_o + z_1) + (1 - t) \cdot (v_o + z_2) \in K_F(v_o, V)$.

Wir zeigen jetzt die Konvexität von $PK(v_o, V)$. Dazu seien $v_o + t_1 \cdot (v_1 - v_o)$, $v_o + t_2 \cdot (v_2 - v_o) \in PK(v_o, V)$, und ohne Einschränkung seien $t_1, t_2 > 0$. Die Quasisternförmigkeit von V bezüglich v_o impliziert für i=1,2 die Existenz von $d_{v_i} \in (0,1]$ mit

$$v_o + d \cdot (v_i - v_o) \in V \quad \text{für alle } d \in [0, d_{v_i}] .$$

Also ist $v_o + d \cdot t_i \cdot (v_i - v_o) \in V$ für i=1,2 und $d \in [0, \frac{d_{v_i}}{t_i}]$. Mit $d_o := \min \left\{ \frac{d_{v_i}}{t_i} : i=1,2 \right\}$ gilt dann insbesondere

$$v_o + c_o \cdot t_i \cdot (v_i - v_o) \in V \quad \text{für i=1,2 und ein } c_o \in (0, d_o] .$$

Wegen der gleichmäßigen Quasisternförmigkeit gibt es ein $s \in (0,1]$ mit

$$v_o + s \cdot c_o \cdot (c \cdot t_1 (v_1 - v_o) + (1 - c) \cdot t_2 \cdot (v_2 - v_o)) \in V$$

für alle $c \in [0,1]$. Aus $s \cdot c_o > 0$ folgt mit Definition 2.1

$$c \cdot (v_o + t_1 \cdot (v_1 - v_o)) + (1 - c) \cdot (v_o + t_2 \cdot (v_2 - v_o))$$
$$= v_o + c \cdot t_1 \cdot (v_1 - v_o) + (1 - c) \cdot t_2 \cdot (v_2 - v_o)$$

$= v_o + \frac{1}{sc_o}(sc_o(ct_1(v_1-v_o)+(1-c)t_2(v_2-v_o))) \in PK(v_o,V)$

für alle $c \in [0,1]$. ⌋

Bemerkung 2.15

Die gleichmäßige Quasisternförmigkeit ist im allgemeinen keine notwendige Bedingung für die Konvexität von $PK(v_o,V)$ und $K_F(v_o,V)$. Dies zeigen die Beispiele

(i) $v_o = (0,0) \in V \subset \mathbb{R}^2$ mit

$V = \{(x,|x|): x \in [-1,1]\} \cup \{(x,1): x \in [-1,1]\}$

und

(ii) $v_o = (0,0) \in V \subset \mathbb{R}^2$ mit

$V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x,y): y = \frac{1}{n}\ ,\ x \in [-\frac{1}{n}\ ,\ \frac{1}{n}]\} \cup \{(0,0)\}$.

Obwohl im allgemeinen weder $PK(v_o,V) \subset K_F(v_o,V)$ noch $K_F(v_o,V) \subset PK(v_o,V)$ gilt, können wir in bestimmten Fällen entsprechende Inklusionsbeziehungen angeben.

Satz 2.16

(i) Für eine bezüglich $v_o \in V$ quasisternförmige Menge $V \subset X$ ist $PK(v_o,V) \subset K_F(v_o,V)$.

(ii) Ist $X \in NVR(\mathbb{K})$, $N \in N(X)$, $v_o \in V \subset X$ und $PK(v_o,V)$ abgeschlossen, so gilt $K_N(v_o,V) \subset PK(v_o,V)$.

Beweis:

(i) Zu $x \in PK(v_o,V)$ gibt es ein $t \geq 0$ und $v \in V$ mit $x = v_o + t\cdot(v - v_o)$. Ohne Einschränkung sei $t > 0$.

Zu vorgegebenem $r>0$ und $\varepsilon>0$ gibt es ein $t_v \in (0,1)$ mit

$$v_o + d\cdot(v - v_o) \in V \quad \text{für alle } d \in [0,t_v] .$$

Mit $a \in (0,\min\{\varepsilon, \frac{t_v}{t}\})$ und $y := t\cdot(v - v_o)$ gilt $v_o + a\cdot y \in V$ und wegen $y \in U_F(t(v-v_o),r)$ folglich $x \in K_F(v_o,V)$.

(ii) Sei $v_o + z \in K_N(v_o,V)$ und $v_o + z \notin PK(v_o,V)$. Dann existiert ein $r_1 > 0$ mit

$$\| v_o + z - x \| > r_1 \quad \text{für alle } x \in PK(v_o,V) .$$

Zu $r \in (0,r_1)$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $a \in (0,\varepsilon)$, ein $v_1 \in V$ und ein $y \in U_N(z,r)$ mit $y = \frac{1}{a}\cdot(v_1 - v_o)$. Die Ungleichung

$$r_1 < \| v_o + z - (v_o + \tfrac{1}{a}\cdot(v_1 - v_o)) \| = \| z - y \| < r_1$$

liefert einen Widerspruch. ⌟

§ 3 Rechtsseitige Gateaux-Ableitung und Kolmogoroff-Mengen 2. Art

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Formulierung von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Vorliegen einer Minimallösung bei der Approximation bezüglich eines sublinearen Funktionals F ist die rechtsseitige Gateaux-Ableitung von F. Dabei heißt ein auf $X \in VR(\mathbb{K})$ definiertes konvexes Funktional F rechtsseitig Gateaux-differenzierbar in $x \in X$ (vgl. HOLMES[26]), falls für alle $y \in X$ der rechtsseitige Limes der Funktion

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow \frac{1}{t} \cdot (F(x + t \cdot y) - F(x)) \in \mathbb{R}$$

(für $t \searrow 0$) existiert. Dieser Limes heißt rechtsseitige Gateaux-Ableitung von F im Punkt x in Richtung y und wird mit $F'_+(x,y)$ bezeichnet. Es gilt der

Satz 3.1 (siehe HOLMES[26])
Ein konvexes Funktional F auf $X \in VR(\mathbb{K})$ ist in jedem $x \in X$ rechtsseitig Gateaux-differenzierbar, und es gelten die folgenden Aussagen :

(3.1) $F'_+(x, \cdot\ ) \in SF(X)$.

(3.2) $-F'_+(x,-y) \leq F'_+(x,y)$ für alle $y \in X$.

(3.3) Es ist $L \in \partial F(x)$ genau dann, wenn
$\operatorname{Re} L(y) \leq F'_+(x,y)$ für alle $y \in X$ gilt.

Ist $F \in SF(X)$, so gilt

(3.4) $F'_+(x,y) \leq F(y)$ für alle $x,y \in X$.

Lemma 3.2 (vgl. KÖTHE[29])

Ist $X \in VR(\mathbb{K})$ und $F \in SF(X)$, so gilt

$$F'_+(x, a\cdot x + y) = a\cdot F(x) + F'_+(x,y)$$

für alle $x,y \in X$ und alle reellen Zahlen a.

Beweis:

Wir wählen t hinreichend klein, so daß $1+ta > 0$ gilt.

Dann ergibt sich aus

$$\frac{1}{t}\cdot(F(x + t\cdot(a\cdot x + y)) - F(x))$$

$$= \frac{1}{t}\cdot((1 + a\cdot t)\cdot F(x + \frac{t}{1+at}\cdot y) - F(x))$$

$$= \frac{1+at}{t}\cdot(F(x + \frac{t}{1+at}\cdot y) - F(x)) + a\cdot F(x)$$

die Behauptung, da mit $t \downarrow 0$ auch $\frac{t}{1+at} \downarrow 0$ gilt. □

Eine weitere Charakterisierung der solaren Punkte einer Teilmenge V des Vektorraums X bezüglich eines sublinearen Funktionals F gibt der

Satz 3.3 (BRECKNER[3])

Sei $X \in VR(\mathbb{K})$, $F \in SF(X)$ und v_o Element der nichtleeren Teilmenge V von X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) v_o ist solarer Punkt von V bezüglich F.

(ii) Für alle $f \in X$ ist $v_o \in B(f,V,F)$ genau dann, wenn

$$F'_+(v_o - f, v - v_o) \geq 0 \quad \text{für alle } v \in V \text{ gilt.}$$

Die Sätze 1.9 und 3.3 zeigen, daß eine beste Approximation einerseits durch die Eigenschaft der Elemente des Subgra-

dienten und andererseits durch das Verhalten der rechtsseitigen Gateaux-Ableitung charakterisiert werden kann. Ein direkter Nachweis der Äquivalenz dieser beiden Eigenschaften wird sich als Spezialfall des folgenden Satzes ergeben.

Satz 3.4

Ist $X \in VR(\mathbb{K})$, $F \in SF(X)$ und V eine nichtleere Teilmenge von X, so gilt für alle $x \in X$:
Die Ungleichung $F'_+(x,v) \geq 0$ ist genau dann für alle $v \in V$ erfüllt, falls zu jedem $v \in V$ ein $L_v \in \partial F(x)$ mit $\operatorname{Re} L_v(v) \geq 0$ existiert.

Beweis:

Für $v \in V$ und $L_v \in \partial F(x)$ mit $\operatorname{Re} L_v(v) \geq 0$ folgt aus (3.3) unmittelbar $F'_+(x,v) \geq 0$.
Sei also umgekehrt $F'_+(x,v) \geq 0$.
(i) Ist $X \in VR(\mathbb{R})$, so definieren wir auf der Menge $Y := \{ a \cdot x + b \cdot v : a,b \in \mathbb{R} \}$ ein reellwertiges reell-lineares Funktional L durch

$$L(a \cdot x + b \cdot v) := a \cdot F(x) + b \cdot F'_+(x,v) .$$

L ist wohldefiniert; denn sind x und v linear abhängig, so brauchen wir das Verhalten von L ohne Einschränkung nur für den Fall $x = c \cdot v$ mit $c \neq 0$ zu untersuchen. Aus $F'_+(x,0) = 0$ folgt $F'_+(x, -\frac{1}{c} \cdot x + v) = 0$, und daher impliziert Lemma 3.2

$$F'_+(x,v) - \frac{1}{c} \cdot F(x) = 0 .$$

Somit ergibt sich für alle $a,b \in \mathbb{R}$

$$L(a\cdot x + b\cdot v) = a\cdot F(x) + b\cdot F'_+(x,v)$$
$$= a\cdot c\cdot F'_+(x,v) + b\cdot F'_+(x,v)$$
$$= (a\cdot c + b)\cdot F'_+(x,v) = L((a\cdot c + b)\cdot v) .$$

Für alle $y \in Y$ gilt $L(y) \leq F(y)$; ist nämlich $b \geq 0$, so folgt aus Lemma 3.2, (3.1) und (3.4)

$$L(a\cdot x + b\cdot v) = a\cdot F(x) + b\cdot F'_+(x,v)$$
$$= F'_+(x,a\cdot x + b\cdot v) \leq F(a\cdot x + b\cdot v) ;$$

für $b < 0$ gilt mit (3.2) :

$$L(a\cdot x + b\cdot v) = -((-a)\cdot F(x) + (-b)\cdot F'_+(x,v))$$
$$= -F'_+(x, -a\cdot x - b\cdot v) \leq F'_+(x,a\cdot x + b\cdot v) .$$

Nach Definition von L ist $L(x) = F(x)$, und die Voraussetzung impliziert $L(v) = F'_+(x,v) \geq 0$.

Nach dem Satz von HAHN-BANACH (vgl. DUNFORD-SCHWARTZ[18]) gibt es ein $L_v \in X^*$ mit

(3.5) $L_v \in \partial F(x)$ und $L_v(v) \geq 0$.

(ii) Ist $X \in VR(\mathbb{C})$ und fassen wir X als reellen Vektorraum auf, so finden wir nach (i) ein reell-lineares Funktional L_v mit Eigenschaft (3.5).

Wir definieren $L^*_v(z) := L_v(z) - i\cdot L_v(i\cdot z)$. Dann ist $L^*_v \in X^*$ und es gilt

$$\operatorname{Re} L^*_v(z) = L_v(z) \leq F(z) \quad \text{für alle } z \in X ,$$
$$\operatorname{Re} L^*_v(x) = L_v(x) = F(x)$$

und

$$\operatorname{Re} L^*_v(v) = L_v(v) \geq 0 . \quad \square$$

Für ein positives sublineares Funktional F und für eine Menge V von bezüglich F solaren Punkten wurde diese Aussage (ohne beim Beweis auf die Wohldefiniertheit von L einzugehen) von HENZE[25] angegeben.
Um die Aussage von Satz 3.4 für $X \in LKR(\mathbb{K})$ und ein stetiges konvexes Funktional F beweisen zu können, benötigen wir den Satz von MOREAU-PSCHENICHNII

Satz 3.5 (siehe HOLMES[26])
Für ein stetiges konvexes Funktional F auf $X \in LKR(\mathbb{K})$ gilt

$$F'_+(x,y) = \max_{L \in \partial F(x)} \operatorname{Re} L(y) \quad \text{für alle } x,y \in X .$$

Korollar 3.6
Ist F ein stetiges konvexes Funktional auf $X \in LKR(\mathbb{K})$ und V eine nichtleere Teilmenge von X, so gilt für alle $x \in X$:
Genau dann ist $F'_+(x,v) \geq 0$ für alle $v \in V$, falls zu jedem $v \in V$ ein $L_v \in EP(\partial F(x))$ mit $\operatorname{Re} L_v(v) \geq 0$ existiert.

Beweis:
Aus $F'_+(x,v) \geq 0$ folgt mit Satz 3.5 $\max_{L \in \partial F(x)} \operatorname{Re} L(v) \geq 0$.
Satz 0.1 und Lemma 1.3 liefern

$$\max_{L \in EP(\partial F(x))} \operatorname{Re} L(v) \geq 0 ,$$

und daher gibt es zu jedem v ein $L_v \in EP(\partial F(x))$ mit $\operatorname{Re} L_v(v) \geq 0$.
Die umgekehrte Richtung leiten wir direkt aus Satz 3.5 ab. □

Im folgenden zeigen wir insbesondere, daß sich mit Hilfe des Verhaltens der rechtsseitigen Gateaux-Ableitung eine stets notwendige Bedingung für eine beste Approximation angeben läßt. Außerdem charakterisieren wir die Mengen, für welche diese Bedingung auch hinreichend für eine Minimallösung ist. Dazu beweisen wir zunächst als Verallgemeinerung eines von BROSOWSKI [10] für die Approximation in normierten Vektorräumen erhaltenen Ergebnisses den

Satz 3.7

Ist V eine nichtleere Teilmenge von $X \in VR(\mathbb{K})$ und $F \in SF(X)$, so folgt für $v_0 \in V$, $f \in X$ und $r > 0$ aus $v_0 \in B(f, V \cap U_F(v_0,r), F)$ stets $v_0 \in B(f, K_F(v_0,V), F)$.

Beweis:

Angenommen, es existiert ein $v_0 + z \in K_F(v_0,V)$ mit

$$r := F(v_0 - f) - F(v_0 + z - f) > 0 .$$

Setzen wir

$$b := \begin{cases} \frac{r}{r+F(z)} & \text{für } r+F(z) > 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

so gibt es zu r und $\varepsilon \in (0, \min\{b,1\})$ ein $a \in (0, \varepsilon)$ und $y \in U_F(z,r)$ mit $v_0 + a \cdot y \in V$. Aus der Ungleichung

$$F(v_0 + a \cdot y - v_0) = a \cdot F(y) \leq a \cdot (F(y - z) + F(z)) < a \cdot (r + F(z)) < b \cdot (r + F(z)) \leq r$$

folgt $v_0 + a \cdot y \in V \cap U_F(v_0,r)$. Wegen der Abschätzung

$$F(y + v_0 - f) \leq F(y - z) + F(z + v_0 - f) < r + F(v_0 + z - f) = F(v_0 - f)$$

gilt die Ungleichung

$$F(v_o + a\cdot y - f) = F((1 - a)\cdot(v_o - f) + a\cdot(y + v_o - f))$$
$$\leq (1 - a)\cdot F(v_o - f) + a\cdot F(y + v_o - f)$$
$$< (1 - a)\cdot F(v_o - f) + a\cdot F(v_o - f) = F(v_o - f) ;$$

und daher folgt im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $v_o + a\cdot y \in V \cap U_F(v_o,r)$ eine bessere Approximation an f ist als das Element v_o. ⌋

Mit Hilfe der rechtsseitigen Gateaux-Ableitung geben wir eine notwendige Bedingung dafür an, daß $v_o \in V$ eine lokal beste Approximation an $f \in X$ ist.

Korollar 3.8

Sei $X \in VR(\mathbb{K})$, $F \in SF(X)$, $f \in X$ und V eine nichtleere Teilmenge von X. Aus $v_o \in B(f, V \cap U_F(v_o,r), F)$ für $v_o \in V$ und ein $r > 0$ folgt :

(i) $F'_+(v_o - f, k - v_o) \geq 0$ für alle $k \in K_F(v_o,V)$.

(ii) $K_F(v_o,V)$ erfüllt die VGKB in v_o bezüglich f und F.

Beweis:

Nach Satz 3.7 gilt $v_o \in B(f,K_F(v_oV),F)$, und wegen Lemma 2.6 und Satz 1.7 ist v_o ein solarer Punkt von $K_F(v_o,V)$ bezüglich F. Die Aussage von Satz 3.3 liefert die Gültigkeit von (i), und die Äquivalenz von (i) und (ii) ergibt sich aus Satz 3.4. ⌋

Korollar 3.9

Sei $X \in LKR(\mathbb{K})$, $F \in SSF(X)$, $f \in X$ und v_0 Element der nichtleeren Teilmenge V von X. Gilt die Beziehung $v_0 \in B(f, V \cap U_F(v_0, r), F)$ für ein $r > 0$, so erfüllen alle $k \in K_F(v_0, V)$ die Ungleichung

$$\min_{L \in EP(\partial F(v_0 - f))} \operatorname{Re} L(v_0 - k) \leq 0 \ .$$

Beweis:

Nach Korollar 3.8 ist

$$\inf_{L \in \partial F(v_0 - f)} \operatorname{Re} L(v_0 - k) \leq 0$$

für alle $k \in K_F(v_0, V)$. Daher implizieren Satz 0.1 und Lemma 1.3 die Behauptung. □

Die Aussage von Korollar 3.9 enthält für den Spezialfall eines normierten Vektorraumes X ein Ergebnis von BROSOWSKI [10]. Dabei ist nur zu beachten, daß $v_0 \in B(f, V, F)$ stets $v_0 \in B(f, V \cap U_F(v_0, r), F)$ für ein beliebiges $r > 0$ impliziert und daß für eine Norm N genau dann - L ein Element von $EP(\partial N(f - v_0))$ ist, falls $L \in EP(\partial N(v_0 - f))$ ist.

Eine hinreichende Bedingung dafür, daß eine beste Approximation $v_0 \in V$ an ein $f \in X$ dadurch charakterisiert wird, daß $K_F(v_0, V)$ die VVGKB in v_0 bezüglich f und F erfüllt, gibt der folgende

Satz 3.10

Sei $X \in VR(\mathbb{K})$, $F \in SF(X)$ und V eine nichtleere Teilmenge von X. Ist V gleichmäßig quasisternförmig bezüglich $v_o \in V$, so gilt für alle $f \in X$:
v_o ist genau dann Element von $B(f,V,F)$, falls $K_F(v_o,V)$ die VVGKB in v_o bezüglich f und F erfüllt.

Beweis:

Nach Lemma 2.9 folgt die Inklusion $V \subset K_F(v_o,V)$. Aus der VVGKB von $K_F(v_o,V)$ in v_o bezüglich f und F ergibt sich die Gültigkeit der VVGKB von V in v_o, welche nach Lemma 1.1 stets hinreichend für $v_o \in B(f,V,F)$ ist. Andererseits folgt aus $v_o \in B(f,V,F)$ wegen Satz 3.7 stets $v_o \in B(f,K_F(v_o,V),F)$. Nach Satz 2.14 ist $K_F(v_o,V)$ konvex, und daher impliziert Satz 1.10 die Behauptung. ⌋

Nach Satz 3.7 ist $v_o \in B(f,V,F)$ eine stets hinreichende Bedingung für $v_o \in B(f,K_F(v_o,V),F)$. Fordern wir die Notwendigkeit dieser Eigenschaft für ein $v_o \in V$, so gilt

Satz 3.11

Ist v_o Element der nichtleeren Teilmenge V von $X \in VR(\mathbb{K})$, $F \in SF(X)$ und gilt für jedes $f \in X$:

(3.6) $v_o \in B(f,K_F(v_o,V),F)$ impliziert $v_o \in B(f,V,F)$,

so ist v_o solarer Punkt von V bezüglich F.

Beweis:

Ist $v_o \in B(f,V,F)$, so gibt es nach Korollar 3.8 zu jedem $k \in K_F(v_o,V)$ ein $L_k \in \partial F(v_o - f)$ mit $\operatorname{Re} L_k(v_o - k) \leq 0$. Es ist $L_k \in \partial F(0)$ und $\operatorname{Re} L_k(v_o - f) = F(v_o - f)$, und daher folgt

$$\operatorname{Re} L_k(t\cdot(v_o - f)) = F(t\cdot(v_o - f))$$

für jedes $t \geq 1$. Also gilt

$$L_k \in \partial F(t\cdot(v_o - f)) = \partial F(v_o - (t\cdot f + (1 - t)\cdot v_o))$$

für alle $t \geq 1$. Nach Lemma 1.1 ist v_o ein Element von $B(tf + (1 - t)v_o, K_F(v_o,V),F)$, und (3.6) impliziert $v_o \in B(tf + (1 - t)v_o,V,F)$ für alle $t \geq 1$. ⌋

Für den Spezialfall $X \in NVR(\mathbb{K})$ wurde die Aussage dieses Satzes von BROSOWSKI[11] ohne Beweis angegeben.

Wir zeigen nun, daß (3.6) im allgemeinen nicht notwendig dafür ist, daß v_o solarer Punkt von V bezüglich F ist.

Beispiel 3.12

$v_o = (0,0)$ ist solarer Punkt von $V = \{(x,x^2): x \in [-1,1]\}$ bezüglich der euklidischen Norm N des $\mathbb{R}^2$. Für $f = (0,1)$ gilt wegen $K_N(v_o,V) = \mathbb{R}$ zwar $v_o \in B(f,K_N(v_o,V),N)$, jedoch ist $v_o \notin B(f,V,N)$.

Für gewisse solare Punkte können wir jedoch die Notwendigkeit der Eigenschaft (3.6) nachweisen.

Satz 3.13

Für eine bezüglich $v_o \in V$ quasisternförmige Teilmenge V von $X \in VR(\mathbb{K})$ und $F \in SF(X)$ sind folgende Aussagen für alle $f \in X$ äquivalent :

(i) $v_o \in B(f, K_F(v_o, V), F)$.

(ii) $v_o \in B(f, V, F)$.

Beweis:

Nach Satz 3.7 ist jedes $v_o \in B(f,V,F)$ auch Element von $B(f, K_F(v_o,V), F)$. Andererseits folgt aus der Quasisternförmigkeit nach Lemma 2.9 die Inklusion $V \subset K_F(v_o,V)$, und daher ist trivialerweise $v_o \in B(f,V,F)$. ⌋

Im weiteren werden wir untersuchen, in wieweit die notwendigen Bedingungen von Korollar 3.8 stets hinreichend für eine Minimallösung sind. In Analogie zu BROSOWSKI und WEGMANN[13] treffen wir die

Definition 3.14

Eine nichtleere Teilmenge V von $X \in VR(\mathbb{K})$ heißt Kolmogoroff-Menge 2. Art in $v_o \in V$ bezüglich $F \in SF(X)$, falls für jedes $f \in X$ die Gültigkeit der VGKB von $K_F(v_o,V)$ in v_o bezüglich f und F stets hinreichend für $v_o \in B(f,V,F)$ ist.

Für $X \in NVR(\mathbb{K})$ wiesen BROSOWSKI und WEGMANN[13] mit Hilfe eines Charakterisierungssatzes für Kolmogoroff-Mengen 2. Art nach, daß jede konvexe Teilmenge V von X in jedem

ihrer Punkte eine Kolmogoroff-Menge 2. Art bezüglich der Norm N ist. Wir erweitern dieses Ergebnis in Form von

Lemma 3.15

Jede bezüglich $v_o \in V$ quasisternförmige Teilmenge V von $X \in VR(\mathbb{K})$ ist eine Kolmogoroff-Menge 2. Art in v_o bezüglich jedes $F \in SF(X)$.

Beweis:

Wegen der Gültigkeit der VGKB von $K_F(v_o,V)$ in v_o bezüglich $f \in X$ und F und wegen $V \subset K_F(v_o,V)$ gibt es zu jedem $v \in V$ ein $L_v \in \partial F(v_o - f)$ mit $\operatorname{Re} L_v(v_o - v) \leq 0$. Mit Lemma 1.1 folgt die Behauptung. □

Im folgenden streben wir eine Charakterisierung der Kolmogoroff-Mengen 2. Art an. Dazu benötigen wir eine wichtige Aussage über die Beziehungen zwischen den solaren Punkten einer Menge V und den Elementen von V, bezüglich welcher V eine Kolmogoroff-Menge 2. Art ist.

Lemma 3.16

Ist $V \subset X \in VR(\mathbb{K})$ eine Kolmogoroff-Menge 2. Art in $v_o \in V$ bezüglich $F \in SF(X)$, so ist v_o solarer Punkt von V bezüglich F.

Beweis:

Sei $f \in X$ und $v_o \in B(f,K_F(v_o,V),F)$. Nach Satz 1.7 ist v_o

solarer Punkt von $K_F(v_o,V)$ bezüglich F, und daher erfüllt $K_F(v_o,V)$ wegen Satz 1.9 die VGKB in v_o bezüglich f und F. Nach Voraussetzung ist $v_o \in B(f,V,F)$, und demnach ist (3.6) für jedes $f \in X$ erfüllt. Somit liefert Satz 3.11 die Behauptung. ⌋

Die Aussage von Lemma 3.16 wurde für $X \in NVR(\mathbb{K})$ von BROSOWSKI und WEGMANN [13] wesentlich bei der Charakterisierung der Mengen $V \subset X$ benutzt, welche in jedem $v_o \in V$ eine Kolmogoroff-Menge 2. Art bezüglich der gegebenen Norm von X sind.

Wir charakterisieren nur die Kolmogoroff-Mengen 2. Art durch Eigenschaften der rechtsseitigen Gateaux-Ableitung.

Satz 3.17

Für eine v_o enthaltende Teilmenge V von $X \in VR(\mathbb{K})$ und ein $F \in SF(X)$ sind folgende Aussagen äquivalent :

(i) V ist eine Kolmogoroff-Menge 2. Art in v_o bezüglich F.

(ii) Für alle $f \in X$ gilt:
Gibt es ein $v \in V$ mit $\operatorname{Re} L(v_o - v) > 0$ für alle $L \in \partial F(f)$, so existiert ein $k \in K_F(v_o,V)$ mit $\operatorname{Re} L(v_o - k) > 0$ für alle $L \in \partial F(f)$.

(iii) Für alle $f \in X$ ist die Bedingung
$F'_+(v_o - f, k - v_o) \geq 0$ für alle $k \in K_F(v_o,V)$
hinreichend für $v_o \in B(f,V,F)$.

(iv) Für alle $f \in X$ folgt aus der Gültigkeit von

$$F'_+(f, v - v_o) < 0 \quad \text{für ein } v \in V$$

die Existenz eines $k \in K_F(v_o, V)$ mit $F'_+(f, k - v_o) < 0$.

Beweis:

"(i) $\Rightarrow$ (ii)": Für $f \in X$ und $v \in V$ gelte

$$\operatorname{Re} L(v_o - v) > 0 \quad \text{für alle } L \in \partial F(f).$$

Nach Lemma 3.16 ist v_o solarer Punkt von V bezüglich F, und daher impliziert Satz 1.9

$$v_o \notin B(v_o - f, V, F) .$$

Nach Voraussetzung gibt es dann ein $k \in K_F(v_o, V)$ mit

$$\operatorname{Re} L(v_o - k) > 0 \quad \text{für alle } L \in \partial F(f).$$

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)": Sei $f \in X$ und $F'_+(v_o - f, k - v_o) \geq 0$ für alle $k \in K_F(v_o, V)$. Angenommen, es ist $v_o \notin B(f, V, F)$. Dann gibt es nach Lemma 1.1 ein $v \in V$ mit

$$\operatorname{Re} L(v_o - v) > 0 \quad \text{für alle } L \in \partial F(v_o - f).$$

Nach Voraussetzung gibt es ein $k_1 \in K_F(v_o, V)$ mit

$$\operatorname{Re} L(v_o - k_1) > 0 \quad \text{für alle } L \in \partial F(v_o - f).$$

Da v_o solarer Punkt von $K_F(v_o, V)$ bezüglich F ist, folgt

$$v_o \notin B(f, K_F(v_o, V), F) ,$$

und daher impliziert Satz 3.3 im Widerspruch zur Voraussetzung die Existenz eines $k_2 \in K_F(v_o, V)$ mit

$$F'_+(v_o - f, k_2 - v_o) < 0 .$$

"(iii) $\Rightarrow$ (iv)": Wir zeigen zunächst, daß v_o ein solarer Punkt von V bezüglich F ist.

Sind $f \in X$ und $v_o \in B(f, V, F)$, und nehmen wir die Existenz

eines $t > 1$ mit $v_0 \notin B(t \cdot f + (1 - t) \cdot v_0, V, F)$ an, so gibt es nach Voraussetzung ein $k_1 \in K_F(v_0, V)$ mit

$$F'_+(v_0 - (tf + (1 - t)v_0), k_1 - v_0) = F'_+(t(v_0 - f), k_1 - v_0)$$
$$= t \cdot F'_+(v_0 - f, v_0 + \frac{1}{t} \cdot (k_1 - v_0) - v_0) < 0 .$$

Nach Lemma 2.6 ist $k_2 := v_0 + \frac{1}{t} \cdot (k_1 - v_0) \in K_F(v_0, V)$, und folglich ergibt sich mit Korollar 3.8 $v_0 \notin B(f, V, F)$, was einen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt.

Sei nun für $f \in X$ und $v \in V$ die Ungleichung

$$F'_+(f, v - v_0) < 0$$

erfüllt. Dann impliziert Satz 3.3 $v_0 \notin B(v_0 - f, V, F)$. Nach Voraussetzung gibt es dann ein $k \in K_F(v_0, V)$ mit

$$F'_+(f, k - v_0) < 0 .$$

"(iv) $\Longrightarrow$ (i)" : Sei $f \in X$ und für alle $k \in K_F(v_0, V)$ gebe es ein $L_k \in \partial F(v_0 - f)$ mit $\operatorname{Re} L_k(v_0 - k) \leq 0$. Angenommen, es ist $v_0 \notin B(f, V, F)$. Dann gibt es ein $v \in V$ mit

$$F'_+(v_0 - f, v - v_0) < 0 .$$

Nach Voraussetzung existiert ein $k_1 \in K_F(v_0, V)$, welches die Ungleichung $F'_+(v_0 - f, k_1 - v_0) < 0$ erfüllt. Da v_0 solarer Punkt von $K_F(v_0, V)$ bezüglich F ist, impliziert Satz 3.3

$$v_0 \notin B(f, K_F(v_0, V), F) .$$

Da die Gültigkeit der VGKB von $K_F(v_0, V)$ in v_0 bezüglich f und F nach Lemma 1.1 stets hinreichend für die Beziehung $v_0 \in B(f, K_F(v_0, V), F)$ ist, folgt im Widerspruch zur Voraussetzung $\operatorname{Re} L(v_0 - k_2) > 0$ für ein $k_2 \in K_F(v_0, V)$ und alle Elemente L von $\partial F(v_0 - f)$. ⌟

Korollar 3.18

Für eine v_o enthaltende Teilmenge V von $X \in LKR(\mathbb{K})$ und für $F \in SSF(X)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) V ist eine Kolmogoroff-Menge 2. Art in v_o bezüglich F.

(ii) Für alle $f \in X$ gilt:
Gibt es ein $v \in V$ mit $\operatorname{Re} L(v_o - v) > 0$ für alle $L \in EP(\partial F(f))$, so existiert ein $k \in K_F(v_o, V)$ mit $\operatorname{Re} L(v_o - k) > 0$ für alle $L \in EP(\partial F(f))$.

(iii) Für alle $f \in X$ gilt:
Gibt es zu jedem $k \in K_F(v_o, V)$ ein $L_k \in EP(\partial F(v_o - f))$ mit $\operatorname{Re} L_k(v_o - k) \leq 0$, so ist $v_o \in B(f, V, F)$.

Beweis:

"(i)$\Longrightarrow$(ii)": Sei $f \in X$, $v \in V$ und für alle $L \in EP(\partial F(f))$ sei $\operatorname{Re} L(v_o - v) > 0$. Nach Lemma 1.3 ist diese Ungleichung für alle $L \in \partial F(f)$ erfüllt, und daher liefert Satz 3.17(ii) die Behauptung.

"(ii)$\Longrightarrow$(iii)" Ist $f \in X$ und gibt es zu jedem $k \in K_F(v_o, V)$ ein $L_k \in EP(\partial F(v_o - f))$ mit $\operatorname{Re} L_k(v_o - k) \leq 0$, so impliziert die Voraussetzung unter Berücksichtigung von Lemma 1.1 die Behauptung.

"(iii)$\Longrightarrow$(i)" Diese Implikation folgt aus Korollar 1.5. □

Für $X \in NVR(\mathbb{K})$ stellt das Korollar 3.18 ein Ergebnis von BROSOWSKI und WEGMANN [13] dar.

Wir geben ein Beispiel für eine Kolmogoroff-Menge 2. Art

an, welche nicht bezüglich jedes Elementes quasisternförmig ist.

Beispiel 3.19

Seien U und W konvexe Teilmengen von $C(Q,\mathbb{R})$ mit kompaktem Hausdorffraum Q, und

$$V = \left\{ \frac{u}{w} \in C(Q,\mathbb{R}) : (u,w) \in U \times W,\ w(x) > 0 \text{ für } x \in Q \right\}$$

sei die Menge der verallgemeinerten rationalen Funktionen. Ist $0 < a < b$, $U = \{ u(x) := c_1 x + d_1 : c_1, d_1 \geq 0 \}$ und $W = \{ w(x) := c_2 x + d_2 : c_2 > 0,\ d_2 \geq 0 \}$, so sind U und W konvexe Teilmengen von $C([a,b],\mathbb{R})$, und für alle $w \in W$ ist $w(x) > 0$ für $x \in [a,b]$.

Dann ist V in $\frac{1}{x} \in V$ nicht quasisternförmig.

Für Teilräume U und W von $C(Q,\mathbb{R})$ zeigten BROSOWSKI und WEGMANN [13], daß V in jedem $v_o \in V$ eine Kolmogoroff-Menge 2. Art ist. Wir führen diesen Nachweis für konvexe Teilmengen U und W, ohne dabei auf die Kenntnis der Darstellung der Extremalpunkte von $S_{C(Q,\mathbb{R})'}$ zurückzugreifen.

Zunächst zeigen wir die Gültigkeit von

$$\frac{u_o}{w_o} + \frac{w}{w_o} \cdot \left(\frac{u}{w} - \frac{u_o}{w_o} \right) \in K_{\|\cdot\|}\left(\frac{u_o}{w_o}, V \right) \text{ für alle } \frac{u}{w} \in V.$$

Sind nämlich $\frac{u}{w} \in V$, $\frac{u_o}{w_o} \in V$, $r > 0$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es wegen der Fréchet-Differenzierbarkeit der Abbildung

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow v(t) := \frac{(1-t)u_o + tu}{(1-t)w_o + tw} \in C(Q,\mathbb{R})$$

in $t = o$ ein $t_o \in (0, \min\{\varepsilon, 1\})$ mit:

$$\| D_v(0;1) - \frac{1}{t_o} \cdot (v(0 + t_o) - v(0)) \| < r ,$$

wobei $D_v(0;1)$ die Fréchet-Ableitung der Abbildung v im Punkt $t = 0$, angewandt auf das Element $1 \in \mathbb{R}$, bezeichnet. Wegen

$$D_v(0;1) = \frac{w}{w_o} \cdot \left(\frac{u}{w} - \frac{u_o}{w_o} \right)$$

ist

$$\frac{1}{t_o} \cdot \left(\frac{(1-t_o)u_o + t_o u}{(1-t_o)w_o + t_o w} - \frac{u_o}{w_o} \right) \in U_{\|\cdot\|}\left(\frac{w}{w_o} \cdot \left(\frac{u}{w} - \frac{u_o}{w_o} \right), r \right) .$$

Wir zeigen nun die Gültigkeit von Aussage (iv) des Satzes 3.17.

Ist für $f \in C(Q,\mathbb{R})$, $\frac{u_o}{w_o} \in V$ und $\frac{u}{w} \in V$ die Ungleichung

$$F'_+(f, \frac{u}{w} - \frac{u_o}{w_o}) < 0$$

erfüllt, so gibt es ein $t > 0$ mit

$$\frac{1}{t} \cdot \left(\| f + t \cdot \left(\frac{u}{w} - \frac{u_o}{w_o} \right) \| - \| f \| \right) < 0 ,$$

und daher gilt

$$\| f + t \cdot \left(\frac{u}{w} - \frac{u_o}{w_o} \right) \| < \| f \| .$$

Wegen $\| \frac{w_o}{w} \| \cdot \frac{w(x)}{w_o(x)} \in (0,1]$ für alle $x \in Q$ folgt

$$\| f + \| \frac{w_o}{w} \| \cdot \frac{w}{w_o} \cdot t \cdot \left(\frac{u}{w} - \frac{u_o}{w_o} \right) \| < \| f \| ,$$

und es ist

$$\frac{\|w\|}{t\cdot\|w_o\|}\cdot\left(\|f + t\|\frac{w_o}{w}\|\left(\frac{u_o}{w_o} + \frac{w}{w_o}\cdot\left(\frac{u}{w} - \frac{u_o}{w_o}\right) - \frac{u_o}{w_o}\right)\| - \|f\|\right) < 0.$$

Für $k := \frac{u_o}{w_o} + \frac{w}{w_o}\cdot\left(\frac{u}{w} - \frac{u_o}{w_o}\right) \in K_{\|\cdot\|}\left(\frac{u_o}{w_o}, V\right)$ gilt

$$F'_+(f, k - \frac{u_o}{w_o}) < 0 ,$$

und folglich ist V eine Kolmogoroff-Menge 2. Art in $\frac{u_o}{w_o} \in V$.

§ 4 Charakterisierung einer Minimallösung durch die Verschärfte Verallgemeinerte Globale Kolmogoroff-Bedingung

Mit Hilfe der Ergebnisse von §2 und §3 wollen wir nun weitere hinreichende Bedingungen dafür angeben, daß für ein Element f eines Vektorraums X die Gültigkeit der VVGKB von $V \subset X$ in $v_o \in V$ bezüglich f und $F \in SF(X)$ notwendig und hinreichend für $v_o \in B(f,V,F)$ ist.
Dazu vereinbaren wir für $X \in VR(\mathbb{K})$, $F \in SF(X)$, $f \in X$, $V \subset X$ und $v_o \in V$ die Menge

$$C_F(v_o,f) := \{ x \in X : \text{Re } L(x - v_o) < 0 \text{ für } L \in \partial F(v_o - f) \} .$$

Diese Menge spielt eine bedeutende Rolle bei Untersuchungen von Verallgemeinerungen des Begriffs eines solaren Punktes in normierten Vektorräumen (siehe AMIR und DEUTSCH[1]).

Bemerkung 4.1

$C_F(v_o,f)$ ist ein konvexer Kegel mit dem Scheitel v_o, und es gilt

$$C_F(v_o,f) = C_F(v_o, v_o + t \cdot (f - v_o))$$

für alle $t \geq 0$.
Für $F(v_o - f) > 0$ ist f stets Element von $C_F(v_o,f)$.
Ist jedoch F eine Halbnorm mit $F(v_o - f) = 0$, so gilt $C_F(v_o,f) = \phi$, da mit $L \in \partial F(v_o - f)$ auch $-L \in \partial F(v_o - f)$ ist.

Für ein stetiges konvexes Funktional F auf $X \in LKR(\mathbb{K})$ folgt mit Satz 0.1 und Lemma 1.3

$$C_F(v_o,f) = \{x \in X : \operatorname{Re} L(x - v_o) < 0 \quad \text{für } L \in EP(\partial F(v_o - f))\}$$

Bezeichnen wir mit rad(A) die Menge der algebraisch inneren Punkte einer Teilmenge A von $X \in VR(\mathbb{K})$ (vgl. KELLEY-NAMIOKA[27]), so gilt der folgende Trennungssatz für konvexe Teilmengen eines Vektorraums:

Satz 4.2 (siehe KELLEY-NAMIOKA[27])

Sind A und B nichtleere konvexe Teilmengen von $X \in VR(\mathbb{K})$ mit $\operatorname{rad}(A) \neq \phi$, so gilt

$$\operatorname{rad}(A) \cap B = \phi$$

genau dann, falls ein $L \in X^* \setminus \{0\}$ mit

$$\sup_{a \in A} \operatorname{Re} L(a) \leq \inf_{b \in B} \operatorname{Re} L(b)$$

existiert.

Lemma 4.3

Ist F ein positives sublineares Funktional auf $X \in VR(\mathbb{K})$ mit $F(v_o - f) > 0$ für $v_o, f \in X$, so gilt

$$\{v_o + t \cdot (x - v_o) : t \in (0,1)\} \cap U_F(f, F(v_o - f)) \neq \phi$$

für alle $x \in C_F(v_o,f)$.

Beweis:

Angenommen, es existiert ein $x \in C_F(v_o,f)$ mit

$$W \cap U_F(0, F(v_o - f)) = \phi ,$$

wobei $W := \{v_o - f + t(x - v_o) : t \in (0,1)\}$ ist.

Das Funktional $\frac{1}{F(v_o - f)} \cdot F$ ist das Minkowskifunktional der Menge $S_F := \{x \in X : F(x) \leq F(v_o - f)\}$, und es ist $0 \in \mathrm{rad}(S_F)$. Nach KELLEY-NAMIOKA[27] folgt daher

$$\mathrm{rad}(S_F) = U_F(0, F(v_o - f)) .$$

Nach Satz 4.2 gibt es ein $L \in X^* \setminus \{0\}$ und ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$(4.1) \qquad \sup_{y \in S_F} \mathrm{Re}\, L(y) \leq c \leq \inf_{w \in W} \mathrm{Re}\, L(w) .$$

Aus $v_o - f \in S_F$ folgt $\mathrm{Re}\, L(v_o - f) \leq c$. Die Annahme $\mathrm{Re}\, L(v_o - f) < c$ impliziert für alle $t \in (0,1)$ wegen

$$\mathrm{Re}\, L(v_o - f) < c \leq \mathrm{Re}\, L(v_o - f + t \cdot (x - v_o))$$

notwendig

$$0 < c - \mathrm{Re}\, L(v_o - f) < t \cdot \mathrm{Re}\, L(x - v_o) .$$

Diese Ungleichung ist natürlich nicht für alle $t \in (0,1)$ zu erfüllen, und daher gilt

$$c = \mathrm{Re}\, L(v_o - f) .$$

Aus der Annahme $c = 0$ folgt

$$(4.2) \qquad \mathrm{Re}\, L(y) \leq 0 \quad \text{für alle } y \in S_F .$$

Wegen $L \neq 0$ existiert ein $z \in X$ mit $\mathrm{Re}\, L(z) \neq 0$. Da 0 algebraisch innerer Punkt von S_F ist, gibt es ein $s > 0$, so daß $a \cdot z$ für alle a mit $|a| \leq s$ Element von S_F ist. Daraus ergibt sich

$$(-\tfrac{s}{2}) \cdot z , \ \tfrac{s}{2} \cdot z \in S_F \quad \text{und} \quad \mathrm{Re}\, L(\tfrac{s}{2} \cdot z) \neq 0$$

im Widerspruch zu (4.2), und folglich ist $c \neq 0$.

Für $x \in X$ definieren wir das lineare Funktional L_o durch

$$L_o(x) := \frac{1}{c}\cdot F(v_o - f)\cdot L(x) \ .$$

Wegen (4.1) gilt offensichtlich

(4.3) $\operatorname{Re} L_o(y) \leq F(v_o - f)$ für alle $y \in S_F$

und

(4.4) $\operatorname{Re} L_o(w) \geq F(v_o - f)$ für alle $w \in W$.

Es ist

$$\operatorname{Re} L_o(v_o - f) = \frac{1}{c}\cdot F(v_o - f)\cdot \operatorname{Re} L(v_o - f) = F(v_o - f),$$

und die Annahme der Existenz eines $z \in X$ mit $F(z) \leq 1$ und $\operatorname{Re} L_o(z) > 1$ impliziert für $y := F(v_o - f)\cdot z \in S_F$ die Ungleichung

$$F(v_o - f) < F(v_o - f)\cdot \operatorname{Re} L_o(z) = \operatorname{Re} L_o(y)$$

im Widerspruch zu (4.3).

Daher ist $L_o \in \partial F(v_o - f)$, und für beliebiges $t \in (0,1)$ folgt unter Anwendung von (4.4)

$$t\cdot \operatorname{Re} L_o(x - v_o) = \operatorname{Re} L_o(v_o + t\cdot(x - v_o) - f) - \operatorname{Re} L_o(v_o - f) \geq F(v_o - f) - \operatorname{Re} L_o(v_o - f) = 0 \ .$$

Diese Ungleichung impliziert im Widerspruch zur Voraussetzung $x \notin C_F(v_o,f)$. ⌋

Definieren wir für $X \in VR(\mathbb{K})$ und $F \in SF(X)$ die Menge

$U_F^*(x,r) := \{ y \in X : F(y - x) < r \}$ für $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}$,

so erhalten wir aus Lemma 4.3 die Aussage von

Satz 4.4

Für $X \in VR(\mathbb{K})$, $F \in SF(X)$ und $v_o, f \in X$ gilt :

(4.5) $$\bigcup_{t>0} U_F^*(v_o + t\cdot(f - v_o), t\cdot F(v_o - f)) \subset C_F(v_o,f) \ .$$

Ist F außerdem positiv und gilt $F(v_o - f) > 0$, so folgt

(4.6) $\bigcup_{t \geq 1} U_F(v_o + t\cdot(f - v_o), t\cdot F(v_o - f)) = C_F(v_o, f)$.

Beweis:

(i) Zu $x \in \bigcup_{t>0} U_F^*(v_o + t\cdot(f - v_o), t\cdot F(v_o - f))$ gibt es ein $t > 0$ mit

$$F(x - v_o - t\cdot(f - v_o)) < t\cdot F(v_o - f) .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} L(x - v_o) &= \operatorname{Re} L(x - v_o) + t\cdot(\operatorname{Re} L(v_o - f) \\ &\quad - F(v_o - f)) = \operatorname{Re} L(x - v_o - t\cdot(f - v_o)) - t\cdot F(v_o - f) \\ &\leq F(x - v_o - t\cdot(f - v_o)) - t\cdot F(v_o - f) < 0 \end{aligned}$$

für alle $L \in \partial F(v_o - f)$, und folglich ist $x \in C_F(v_o, f)$.

(ii) Für $x \in C_F(v_o, f)$ gilt nach Lemma 4.3

$$\{v_o + t\cdot(x - v_o) : t \in (0,1)\} \cap U_F(f, F(v_o - f)) \neq \phi .$$

Es gibt also ein $t_1 \in (0,1)$ mit

$$F(v_o + t_1\cdot(x - v_o) - f) < F(v_o - f) .$$

Somit gilt

$$F(x - (v_o + \tfrac{1}{t_1}\cdot(f - v_o))) < \tfrac{1}{t_1}\cdot F(v_o - f) ,$$

und daher ist $x \in U_F(v_o + \frac{1}{t_1}\cdot(f - v_o), \frac{1}{t_1}\cdot F(v_o - f))$. ⌟

Bemerkung 4.5

Aus (4.6) erhalten wir für normierte Vektorräume ein Ergebnis von AMIR und DEUTSCH[1]. Mit Hilfe von (4.6) können wir einen anderen Beweis von Satz 1.9 für ein positives sublineares Funktional F auf $X \in VR(K)$ und

ein $f \in X$ mit $F(v_o - f) > 0$ angeben. Im normierten Fall haben AMIR und DEUTSCH[1] mit (4.6) den Satz 1.9 bewiesen.

Mit Hilfe der Kegel $C_F(v_o,f)$ und $K_F(v_o,V)$ geben wir Bedingungen dafür an, daß für ein $f \in X$ die Gültigkeit der VVGKB von V in v_o bezüglich f und F hinreichend und notwendig für $v_o \in B(f,V,F)$ ist.

Satz 4.6

Für eine v_o enthaltende Teilmenge V von $X \in VR(\mathbb{K})$, $F \in SF(X)$ und $f \in X$ seien die folgenden Bedingungen erfüllt :

(4.7) $\quad V \subset \operatorname{con} K_F(v_o,V)$.

(4.8) $\quad C_F(v_o,f) \cap K_F(v_o,V) = \phi$
impliziert $C_F(v_o,f) \cap \operatorname{con} K_F(v_o,V) = \phi$.

V erfüllt in v_o genau dann die VVGKB bezüglich f und F, falls $v_o \in B(f,V,F)$ ist.

Beweis:

Es genügt, die Notwendigkeit der VVGKB zu zeigen. Mit $v_o \in B(f,V,F)$ gilt nach Satz 3.7 auch

$$v_o \in B(f,K_F(v_o,V),F) .$$

Als bezüglich v_o sternförmige Menge erfüllt $K_F(v_o,V)$ nach Satz 1.9 die VGKB in v_o bezüglich f und F. Demnach ist

$$C_F(v_o,f) \cap K_F(v_o,V) = \phi ,$$

und mit (4.8) folgt

$$C_F(v_o,f) \cap \operatorname{con} K_F(v_o,V) = \phi .$$

(4.5) impliziert insbesondere

$$U_F^*(f,F(v_o - f)) \cap \operatorname{con} K_F(v_o,V) = \phi .$$

Folglich ist $F(v_o - f) \leq F(x - f)$ für alle Elemente x von $\operatorname{con} K_F(v_o,V)$, und demnach ist $v_o \in B(f,\operatorname{con} K_F(v_o,V),F)$. Die Konvexität von $\operatorname{con} K_F(v_o,V)$ impliziert mit Satz 1.10 die Existenz eines $L \in \partial F(v_o - f)$ mit

$$\operatorname{Re} L(v_o - x) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in \operatorname{con} K_F(v_o,V).$$

Aus der Voraussetzung (4.7) folgt die Behauptung. ⌟

Nach Bemerkung 2.4 erfüllt die Teilmenge $V = \{(x,x),(x,-x) : x \in [0,1]\}$ des mit der Maximumnorm N versehenen $\mathbb{R}^2$ für $v_o = (0,0) \in V$ nicht die Voraussetzungen von Satz 2.2. Wegen

$$V \subset K_N(v_o,V) = \{(x,x),(x,-x) : x \geq 0\}$$

ist (4.7) erfüllt. Weiter gilt für $f = (f_1,f_2) \in \mathbb{R}^2$ nach Satz 4.4

$$C_N(v_o,f) = \bigcup_{t \geq 1} U_N(t \cdot f, N(t \cdot f)) ,$$

und daher genügen genau diejenigen $f \in \mathbb{R}^2$ mit $f_1 \leq 0$ und $|f_2| \leq |f_1|$ der Gleichung

$$C_N(v_o,f) \cap K_N(v_o,V) = \phi .$$

Wegen $\operatorname{con} K_N(v_o,V) = \{(x,y) : x \geq 0, |y| \leq x\}$ gilt

$$C_N(v_o,f) \cap \operatorname{con} K_N(v_o,V) = \phi ,$$

und daher ist (4.8) stets erfüllt.

Also läßt sich nach Satz 4.6 die Eigenschaft, daß $v_o \in V$ eine beste Approximation an ein beliebiges $f \in \mathbb{R}^2$ ist, stets durch die Existenz eines $L \in \mathfrak{N}(v_o - f)$ mit

$$\operatorname{Re} L(v_o - v) \leq 0 \quad \text{für alle } v \in V$$

charakterisieren; daher stellt Satz 4.6 eine Verallgemeinerung von Satz 1.10 dar.

Umgekehrt stellt sich die Frage nach einem Beispiel für eine Menge V, welche zwar die Voraussetzungen von Satz 2.2, nicht aber die von Satz 4.6 erfüllt.

Beispiel 4.7

Für die Teilmenge $V = \{(x,0): x \in [0,1]\} \cup \{(1,y): y \in [0,\frac{1}{2}]\}$ des mit der Summennorm N versehenen $\mathbb{R}^2$ und für $v_o = (0,0)$ ist $\operatorname{con} K_N(v_o,V) = \{(x,0) : x \geq 0\}$ und es gilt $PK(v_o,V) = \{(x,y) : y \leq \frac{1}{2}\cdot x;\ x,y \geq 0\}$. $PK(v_o,V)$ ist konvex, und v_o ist offensichtlich solarer Punkt von V bezüglich N. Wegen $V \not\subset \operatorname{con} K_N(v_o,V)$ ist jedoch die Voraussetzung (4.7) von Satz 4.6 verletzt.

Mit Hilfe der Ergebnisse von §2 folgern wir aus Satz 4.6 das

Korollar 4.8

Für eine v_o enthaltende Teilmenge V von $X \in VR(\mathbb{K})$, $F \in SF(X)$ und $f \in X$ gelte

(4.9) V ist quasisternförmig bezüglich v_o, und
$C_F(v_o,f) \cap K_F(v_o,V) = \phi$ impliziert stets
$C_F(v_o,f) \cap K_F(v_o,\operatorname{con} V) = \phi$.

oder

(4.10) V ist gleichmäßig quasisternförmig bezüglich v_o.

Genau dann ist $v_o \in B(f,V,F)$, falls V die VVGKB in v_o bezüglich f und F erfüllt.

Beweis:

Aus (4.9) folgt mit Lemma 2.9 die Gültigkeit von (4.7). Außerdem impliziert (4.9) zusammen mit Satz 2.11 die Aussage (4.8).

Nach Satz 2.14 folgt aus der gleichmäßigen Quasisternförmigkeit die Konvexität von $K_F(v_o,V)$, und daher ist (4.8) trivialerweise erfüllt. Lemma 2.9 liefert mit Satz 4.6 die Behauptung. □

Als eine weitere Anwendung von Satz 4.6 geben wir das

Beispiel 4.9

$V_1,V_2,\ldots,V_n$ ($n \geq 2$) seien endlichdimensionale Teilräume von C(Q,H) mit kompaktem Hausdorffraum Q und Prähilbertraum H.

Dann ist $V := \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ ein abgeschlossener Kegel mit der Spitze O, und nach Satz 2.10 ist $K_N(O,V) = V$ für die Supremumsnorm N auf C(Q,H). Also ist die Bedingung (4.7) erfüllt, und für ein beliebiges $f \in C(Q,H)$ ist die Eigenschaft (4.8) äquivalent mit

(4.11) $C_N(O,f) \cap \operatorname{con} V \neq \emptyset$ impliziert $C_N(O,f) \cap V \neq \emptyset$.

Diese Eigenschaft ist für $f = 0$ erfüllt. Für $f \neq 0$ ist genau dann $L \in EP(\partial N(-f))$ (siehe BROSOWSKI[10]), falls ein $q \in m(f) := \{ q \in Q: |f(q)| = \| f \| \}$ existiert, so daß für alle $g \in C(Q,H)$ gilt:

$$\text{Re } L(g) = \text{Re } \left(- \frac{f(q)}{\|f\|} , g(q) \right) ,$$

wobei $(,)$ das Skalarprodukt in H bezeichnet. Daher ist $C_N(0,f) = \{ g \in C(Q,H): \text{Re } (f(q),g(q)) > 0 \text{ für alle } q \in m(f) \}$, und (4.11) ist äquivalent mit folgender Bedingung:

(4.12) Gibt es Elemente $v_1,\ldots,v_n$ aus V und $t_1,..,t_n \in [0,1]$ mit $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ und $\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \text{Re } (f(q),v_i(q)) > 0$ für alle $q \in m(f)$, so existiert ein $v \in V$ mit $\text{Re } (f(q),v(q)) > 0$ für alle $q \in m(f)$.

Nach Satz 4.6 ist für diejenigen $f \in C(Q,H)$, welche der Bedingung (4.12) genügen, $0 \in B(f,V,N)$ genau dann, falls ein $L \in \partial N(-f)$ existiert, so daß alle $v \in V$ die Ungleichung $\text{Re } L(v) \geq 0$ erfüllen.

Abschließend geben wir ein Beispiel für eine Charakterisierungsaussage an, die sowohl aus Satz 2.2 als auch aus Satz 4.6 gefolgert werden kann.

Beispiel 4.10

v sei eine lineare Abbildung des $\mathbb{R}^n$ nach C(Q,H) mit Q und H wie in Beispiel 4.9, und P sei eine offene Teil-

menge des $\mathbb{R}^n$. Die Menge $V := \{v(a): a \in P\}$ ist quasisternförmig bezüglich jedes Elements $v(a_o)$ aus V; sind nämlich $a_o, b \in P$, so gibt es wegen der Offenheit von P ein $t_b \in (0,1]$ mit

$$a_o + t\cdot(b - a_o) \in P \quad \text{für alle } t \in [0,t_b] ,$$

und daher folgt aus der Linearität von v

$$v(a_o) + t\cdot(v(b) - v(a_o)) = v(a_o + t\cdot(b - a_o)) \in V$$

für alle $t \in [0,t_b]$. Nach Lemma 3.15 ist V eine Kolmogoroff-Menge 2. Art in $v(a_o)$ bezüglich der Norm N, und nach Lemma 3.16 ist $v(a_o)$ ein solarer Punkt von V bezüglich N. Wegen der Offenheit von P gilt

$$PK(v(a_o),V) = \{v(a) : a \in \mathbb{R}^n\} \text{ für alle } v(a_o) \in V .$$

$PK(v(a_o),V)$ ist somit konvex, und damit sind die Voraussetzungen von Satz 2.2 erfüllt.

Wegen der Quasisternförmigkeit von V in $v(a_o)$ ist (4.7) gültig, und die Abgeschlossenheit von $PK(v(a_o),V)$ impliziert nach Satz 2.16

$$K_N(v(a_o),V) = \{v(a) : a \in \mathbb{R}^n\} .$$

Daher ist $K_N(v(a_o),V)$ konvex, und die Bedingung (4.8) ist trivialerweise erfüllt.
Also folgt auch nach Satz 4.6, daß für jedes $f \in C(Q,H)$ die Eigenschaft $v(a_o) \in B(f,V,N)$ durch die Gültigkeit der VVGKB von V in $v(a_o)$ bezüglich f und N charakterisiert wird.

Kapitel II Charakterisierung von Minimallösungen bei der Simultanapproximation

§ 5 Charakterisierung von Minimallösungen durch die Simultane Verallgemeinerte Globale Kolmogoroff-Bedingung

Falls nichts anderes vereinbart wird, setzen wir generell $X_1, X_2 \in LKR(\mathbb{K})$, $F_1 \in SSF(X_1)$ und $F_2 \in SSF(X_2)$ voraus. Mit A bezeichnen wir stets eine Abbildung von X_1 nach X_2, und zur Abkürzung setzen wir gegebenenfalls $A_2 := A$ und $A_1 := id_{X_1}$.

$v_o \in V$ heißt eine beste Simultanapproximation an $f \in X_1$ bezüglich $V \subset X_1$, falls

$$\max_{i=1,2} F_i(A_i v_o - A_i f) \leq \max_{i=1,2} F_i(A_i v - A_i f)$$

für alle $v \in V$ gilt. Die Menge der besten Simultanapproximationen bezeichnen wir mit $B(f,V,(F_1,F_2))$. Wie in Kapitel I werden wir uns unter der Voraussetzung der Existenz einer besten Simultanapproximation für hinreichende und notwendige Bedingungen für $v_o \in B(f,V,(F_1,F_2))$ interessieren.

Insbesondere ist es unser Ziel, die von BREDENDIEK [6], [7] für spezielle Abbildungen A und spezielle Teilmengen V und für normierte Vektorräume erhaltenen Ergebnisse zu erweitern. Dabei werden grundlegende Begriffe aus Kapitel I eine zentrale Rolle spielen.

Ein entscheidendes Hilfsmittel zur Erlangung einer stets hinreichenden Bedingung für eine beste Simultanapproximation ist der folgende Einschließungssatz:

Satz 5.1

F_1 und F_2 seien stetige konvexe Funktionale auf X_1 bzw. auf X_2, und für die nichtleeren Mengen $M_i \subset X_i'$ $(i=1,2)$ gelte $M_i \subset \partial F_i(0)$. Ist $f \in X_1$ und v_o Element einer Teilmenge V von X_1, und erfüllen alle $v \in V$ die Ungleichung

$$(5.1) \qquad \inf_{(L_1,L_2) \in M_1 \times M_2} \min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) \leq \min_{i=1,2} F_i(0),$$

so gilt:

$$\inf_{(L_1,L_2) \in M_1 \times M_2} \min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i f)$$

$$\leq \inf_{v \in V} \max_{i=1,2} F_i(A_i v - A_i f) =: e(f) \leq \max_{i=1,2} F_i(A_i v_o - A_i f) .$$

Beweis:

Die zweite Ungleichung ist trivialerweise erfüllt.

Angenommen, es existieren $v \in V$ und $a \in \mathbb{R}$ mit:

$$\max_{i=1,2} F_i(A_i v - A_i f) < a < \min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i f)$$

für alle $(L_1,L_2) \in M_1 \times M_2$. Wegen $M_i \subset \partial F_i(0)$ ergibt sich

$$\operatorname{Re} L_i(A_i v - A_i f) \leq F_i(A_i v - A_i f) - F_i(0)$$

für jedes $L_i \in M_i$, und daher gilt für ein hinreichend kleines $b > 0$ und für jedes $L_i \in M_i$ die Abschätzung:

$$\operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) = \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i f) - \operatorname{Re} L_i(A_i v - A_i f)$$

$$> b + F_i(A_iv-A_if) - \operatorname{Re} L_i(A_iv-A_if) \geq b + F_i(A_iv-A_if)$$

$$- (F_i(A_iv-A_if) - F_i(0)) = b + F_i(0) .$$

Also genügen alle $(L_1,L_2) \in M_1 \times M_2$ der Ungleichung

$$\min_{i=1,2} F_i(0) + b < \min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_iv)$$

im Widerspruch zur Voraussetzung (5.1). ⌟

Dieser Einschließungssatz, welcher in Spezialfällen bei COLLATZ[16], MEINARDUS-SCHWEDT[36] und BROSOWSKI[9] zu finden ist, verallgemeinert insbesondere eine von BREDENDIEK[6] bewiesene Aussage für $X_1,X_2 \in NVR(\mathbb{R})$.

Für das folgende vereinbaren wir für $f \in X_1$ und $v_o \in V \subset X_1$ die Mengen $D_i := \partial F_i(A_iv_o-A_if)$ und $E_i := EP(D_i)$ $(i=1,2)$. Welche Elemente v_o und f gemeint sind, wird dabei stets aus dem Zusammenhang hervorgehen.

Mit Hilfe von Satz 5.1 geben wir eine stets hinreichende Bedingung für eine beste Simultanapproximation an.

Satz 5.2

Ist v_o Element von $V \subset X_1$, gilt $F_1(v_o-f) = F_2(Av_o-Af)$ für $f \in X_1$ und ist

$$(5.2) \qquad \min_{(L_1,L_2) \in E_1 \times E_2} \min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_iv_o - A_iv) \leq 0 ,$$

für alle $v \in V$, so folgt $v_o \in B(f,V,(F_1,F_2))$.

Beweis:

Zunächst überlegen wir uns, daß in (5.2) das Infimum

angenommen wird. Aus Stetigkeitsgründen und wegen der $\mathcal{G}(X_i',X_i)$-Kompaktheit von D_i gibt es nämlich ohne Einschränkung ein $L_1^o \in D_1$ mit

$$\operatorname{Re} L_1^o(v_o-v) = a := \min_{(L_1,L_2)\in D_1\times D_2} \min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_iv).$$

Für alle $L_2 \in E_2$ gilt dann insbesondere

$$\operatorname{Re} L_2(Av_o - Av) \geq a .$$

Nach Lemma 1.3 existiert ein $L_1^1 \in E_1$ mit $\operatorname{Re} L_1^1(v_o - v) = a$. Also gibt es ein $(L_1,L_2) \in E_1\times E_2$ mit

$$\min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_iv_o - A_iv) = a .$$

Wegen der Sublinearität der F_i gilt $F_i(0) = 0$. Dann impliziert Satz 5.1 wegen $E_i \subset \partial F_i(0)$ die Ungleichung

$$\inf_{(L_1,L_2)\in E_1\times E_2} \min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_if) \leq e(f)$$

$$\leq \max_{i=1,2} F_i(A_iv_o-A_if) .$$

Wegen $F_1(v_o - f) = F_2(Av_o - Af)$ ergibt sich

$$\max_{i=1,2} F_i(A_iv_o - A_if) = \min_{i=1,2} F_i(A_iv_o - A_if)$$

$$\leq e(f) \leq \max_{i=1,2} F_i(A_iv_o - A_if) ,$$

und daher ist $v_o \in B(f,V,(F_1,F_2))$. □

Für $X_1,X_2 \in \mathrm{NVR}(\mathbb{R})$ enthält die Aussage des Satzes ein Ergebnis von BREDENDIEK[6]. Ferner ergibt sich für $X_1 = X_2$, $F_1 = F_2$ und $A = \mathrm{id}_{X_1}$ eine spezielle Aussage von Lemma 1.1, und wir treffen daher die folgende Vereinbarung:

Definition 5.3

Eine nichtleere Teilmenge V von X_1 erfüllt in $v_o \in V$ die Simultane Verallgemeinerte Globale Kolmogoroff-Bedingung (SVGKB) bezüglich $f \in X_1$ und (F_1,F_2), falls

$$\min_{(L_1,L_2) \in E_1^* \times E_2} \min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) \neq 0$$

für alle $v \in V$ gilt.

Wir stellen uns nun die Frage nach Kriterien, welche die Notwendigkeit der SVGKB für das Vorliegen einer besten Simultanapproximation gewährleisten. Eine erste Antwort gibt der folgende

Satz 5.4 (BREDENDIEK[6])

Seien $X_1,X_2 \in NVR(\mathbb{R})$ (mit $N_i \in N(X_i)$), V ein Teilraum von X_1 und A eine auf V stetige Abbildung von X_1 nach X_2. Die SVGKB von V in $v_o \in V$ bezüglich $f \in X_1 \setminus V$ und (N_1,N_2) ist für $v_o \in B(f,V,(N_1,N_2))$ dann notwendig, falls gilt:

Zu jedem $v \in V$ und jeder abgeschlossenen Menge $W \subset S_{X_2'}$ mit

(5.3) $$L(Av_o - Av) \neq 0 \quad \text{für alle } L \in W,$$

und zu jedem $d > 0$ gibt es ein $t \in (0,d]$, so daß für $v_t := v_o + t\cdot(v - v_o)$ gilt:

$$\operatorname{sign} L(Av_o - Av) = \operatorname{sign} L(Av_o - Av_t) \quad \text{für alle } L \in W.$$

In diesem Paragraphen werden wir dieses Ergebnis erweitern, um zu einer Aussage für $X_1,X_2 \in LKR(\mathbb{K})$, $F_i \in SSF(X_i)$,

einer Teilmenge V von X_1, welche nicht notwendig ein Teilraum von X_1 ist, und eine nicht notwendig stetige Abbildung A von X_1 nach X_2 zu gelangen.

In Anlehnung an die von BROSOWSKI und WEGMANN [13] gegebene Definition der Regularität in normierten Vektorräumen (vgl. § 1) treffen wir die folgende

Definition 5.5

Eine nichtleere Teilmenge V von X_1 heißt S-regulär in $v_o \in V$ bezüglich (X_1, A, X_2), falls für alle $f \in X_1 \setminus \{v_o\}$, für alle $v \in V$, für jede reelle Zahl $t > 0$ und für jedes Paar (W_1, W_2) von $\sigma_{EP(\partial F_i(0))}(X_i', X_i)$-abgeschlossenen Mengen W_i mit

$$E_i \subset W_i \subset EP(\partial F_i(0))$$

und

$$(5.4) \quad \min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) > 0 \quad \text{für } (L_1, L_2) \in W_1 \times W_2$$

ein $v_t \in V$ mit den Eigenschaften

$$(5.5) \quad \operatorname{Re} L_j(A_j v_t - A_j f) < \max_{i=1,2} F_i(A_i v_o - A_i f)$$

für alle $L_j \in W_j$ und $j=1,2$

und

$$(5.6) \quad \max_{i=1,2} F_i(A_i v_t - A_i v_o) < t$$

existiert.

Für den Spezialfall $X \in NVR(\mathbb{K})$, $A = id_X$, $N \in N(X)$ und $X = X_1 = X_2$ mit $N = F_1 = F_2$ erhalten wir die Aussage

(5.7) $V \subset X$ ist genau dann S-regulär in $v_o \in V$ bezüglich (X, id_X, X), falls V in v_o regulär ist.

Die Notwendigkeit der Regularität von V in v_o ist unmittelbar einzusehen.

Sei nun V regulär in $v_o \in V$ und ohne Einschränkung $V \setminus \{v_o\} \neq \emptyset$. Wir geben uns $f \in X \setminus \{v_o\}$, $v \in V$, $s > 0$ und $\mathcal{G}_{EP(S_{X'})}(X', X)$-abgeschlossene Mengen W_1 und W_2 mit

$$EP(\partial N(v_o - f)) \subset W_i \subset EP(S_{X'}) \quad (i=1,2)$$

und

(5.8) $\quad \mathrm{Re}\, L(v_o - v) > 0$ für alle $L \in W := W_1 \cup W_2$

vor. Für $t \in (0,1)$ definieren wir $f_t := v_o + t \cdot (f - v_o)$.

(i) Es sei $f_t \in V$ für alle $t \in (0,1)$. Es gibt ein $t_o \in (0,1)$ mit $t_o \cdot \| f - v_o \| < s$, und für alle $L \in S_X$, gilt

$$\mathrm{Re}\, L(f_{t_o} - f) = \mathrm{Re}\, L(v_o + t_o \cdot (f - v_o) - f)$$

$$= \mathrm{Re}\, L((1-t_o) \cdot (v_o - f)) \leq (1-t_o) \cdot \| v_o - f \| < \| v_o - f \| .$$

Daher erfüllt $v_s := f_{t_o} \in V$ die Bedingung (5.5) und wegen

$$\| v_s - v_o \| = \| f_{t_o} - v_o \| = t_o \cdot \| f - v_o \| < s$$

auch die Bedingung (5.6).

(ii) Gibt es ein $t_o \in (0,1)$ mit $f_{t_o} \in X \setminus V$, so gilt wegen $\partial N(v_o - f_{t_o}) = \partial N(v_o - f)$ die Inklusion

$$EP(\partial N(v_o - f_{t_o})) \subset W \subset EP(S_{X'}) .$$

Da nach Voraussetzung V regulär in v_o ist, gibt es ein $v_s \in V$ mit (1.5) und

$$\operatorname{Re} L(v_s - f_{t_o}) < \| v_o - f_{t_o} \| \quad \text{für alle } L \in W.$$

Aus dieser Ungleichung folgt für alle $L \in W$ die Abschätzung

$$\operatorname{Re} L(v_s - f) = \operatorname{Re} L(v_s - f_{t_o}) + \operatorname{Re} L(f_{t_o} - f)$$
$$< \| v_o - f_{t_o} \| + (1-t_o) \cdot \operatorname{Re} L(v_o - f) \leq \| v_o - f \|,$$

und daher erfüllt v_s auch die Bedingung (5.5), und wir haben somit die Gültigkeit von (5.7) nachgewiesen.

Nach Satz 1.9 und (1.6) stellt die Regularität im Sinne von BROSOWSKI und WEGMANN [13] ein Kriterium für die Notwendigkeit der VGKB dar. Wir zeigen, daß dies auch für die S-Regularität bezüglich der SVGKB gilt.

Satz 5.6

Für die bezüglich (X_1, A, X_2) in $v_o \in V$ S-reguläre Teilmenge V von X_1 und für alle $f \in X_1$ gilt:
Ist $v_o \in B(f, V, (F_1, F_2))$, so erfüllt V die SVGKB in v_o bezüglich f und (F_1, F_2).

Beweis:

Für $f = v_o$ folgt die Behauptung aus Lemma 1.3.
Sei nun $f \in X_1 \setminus \{v_o\}$ und angenommen, es gibt ein $v \in V$ mit

$$\min_{(L_1, L_2) \in E_1 \times E_2} \min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) > 0.$$

Für i=1,2 impliziert dann Lemma 1.3

$$(5.9) \quad a_i := \min_{L_i \in D_i} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) > 0 .$$

Dann ist $c := \min\{a_1, a_2\} > 0$, und für i=1,2 sind

$$W_i := \left\{ L_i \in EP(\partial F_i(0)) : \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) > \frac{c}{2} \right\}$$

nichtleere Teilmengen von X_i'. Für die $\sigma_{EP(\partial F_i(0))}(X_i', X_i)$-offenen Mengen W_i gilt die Inklusion $E_i \subset W_i$.

Für i=1,2 zeigen wir zunächst die Gültigkeit von

$$(5.10) \quad s_i := \sup_{L_i \in EP(\partial F_i(0))\setminus W_i} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i f) < F_i(A_i v_o - A_i f) .$$

Angenommen, es ist $s_i = F_i(A_i v_o - A_i f)$. Gibt es dann ein $L_i \in EP(\partial F_i(0))\setminus W_i$ mit

$$\operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i f) = F_i(A_i v_o - A_i f) ,$$

so ist $L_i \in D_i$, und aus (5.9) ergibt sich der Widerspruch

$$c \leq \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) \leq \frac{c}{2} .$$

Folglich muß $F_i(A_i v_o - A_i f)$ ein Häufungspunkt der Menge $M_i := \{ \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i f) : L_i \in EP(\partial F_i(0))\setminus W_i \}$ sein. Es gibt daher eine Folge $(m_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise verschiedenen Elementen aus M_i mit

$$\lim_{n\to\infty} m_i^n = F_i(A_i v_o - A_i f) .$$

Somit gibt es eine Folge $(L_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise verschiedenen Elementen aus $EP(\partial F_i(0))\setminus W_i$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} L_i^n(A_i v_o - A_i f) = F_i(A_i v_o - A_i f) .$$

Wegen der $\sigma(X_i', X_i)$-Kompaktheit von $\partial F_i(0)$ hat die Menge $\{L_i^n : n\in\mathbb{N}\}$ einen $\sigma(X_i', X_i)$-Häufungspunkt $L_i^o \in \partial F_i(0)$. Aus Stetigkeitsgründen ist $\operatorname{Re} L_i^o(A_i v_o - A_i f)$ Berührungspunkt

von $M := \{ \operatorname{Re} L_i^n(A_i v_o - A_i f) : n \in \mathbb{N} \}$.

Falls $\operatorname{Re} L_i^o(A_i v_o - A_i f)$ isolierter Punkt von M ist, existiert genau ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\operatorname{Re} L_i^o(A_i v_o - A_i f) = \operatorname{Re} L_i^m(A_i v_o - A_i f)$$

im Widerspruch dazu, daß L_i^o $\mathcal{G}(X_i', X_i)$-Häufungspunkt von $\{L_i^n : n \in \mathbb{N}\}$ ist.

Ist jedoch $\operatorname{Re} L_i^o(A_i v_o - A_i f)$ Häufungspunkt von M, so gilt ohne Einschränkung

$$F_i(A_i v_o - A_i f) = \lim_{n \to \infty} \operatorname{Re} L_i^n(A_i v_o - A_i f) = \operatorname{Re} L_i^o(A_i v_o - A_i f).$$

Folglich ist $L_i^o \in D_i$, und mit (5.9) ergibt sich

$$\operatorname{Re} L_i^o(A_i v_o - A_i v) \geq \varepsilon > 0 .$$

Andererseits gilt

$$\operatorname{Re} L_i^n(A_i v_o - A_i v) \leq \frac{c}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und somit

$$\frac{c}{2} \leq |(L_i^o - L_i^n)(A_i v_o - A_i v)| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Diese Ungleichung steht im Widerspruch dazu, daß L_i^o $\mathcal{G}(X_i', X_i)$-Häufungspunkt von $\{L_i^n : n \in \mathbb{N}\}$ ist, und daher haben wir die Gültigkeit der Ungleichung (5.10) gezeigt.

Für die $\mathcal{G}_{EP(\partial F_i(0))}(X_i', X_i)$-abgeschlossenen Hüllen $\overline{W}_i$ der Mengen W_i gilt

$$E_i \subset \overline{W}_i \subset EP(\partial F_i(0)) \quad \text{für } i=1,2$$

und

$$\min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) \geq \frac{c}{2} > 0 \quad \text{für } (L_1, L_2) \in \overline{W}_1 \times \overline{W}_2 .$$

Wegen der S-Regularität von V in v_o gibt es zu $t \in (0, \min_{i=1,2} (F_i(A_i v_o - A_i f) - s_i))$ ein $v_t \in V$ mit den Eigenschaften (5.5) und (5.6). Für alle $L_i \in EP(\partial F_i(0)) \setminus W_i$ gilt

$$\operatorname{Re} L_i(A_i v_t - A_i f) = \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i f) + \operatorname{Re} L_i(A_i v_t - A_i v_o)$$

$$\leq s_i + F_i(A_i v_t - A_i v_o) < F_i(A_i v_o - A_i f) - t$$

$$+ F_i(A_i v_t - A_i v_o) < F_i(A_i v_o - A_i f),$$

und daher wegen (5.5) auch

$$\operatorname{Re} L_j(A_j v_t - A_j f) < \max_{i=1,2} F_i(A_i v_o - A_i f)$$

für jedes $L_j \in EP(\partial F_j(0))$.

Die Bemerkung 1.4 impliziert dann die Gültigkeit dieser Ungleichung für alle $L_j \in \partial F_j(0)$. Da die nichtleere Menge $\partial F_j(A_j v_t - A_j f)$ Teilmenge von $\partial F_j(0)$ ist, folgt

$$F_j(A_j v_t - A_j f) < \max_{i=1,2} F_i(A_i v_o - A_i f)$$

für $j=1,2$, und daher gilt im Widerspruch zur Voraussetzung

$$\max_{i=1,2} F_i(A_i v_t - A_i f) < \max_{i=1,2} F_i(A_i v_o - A_i f) . \quad \square$$

Für die Simultanapproximation definieren wir jetzt S-punktweise konvexe Mengen, für welche wir unter Zusatzvoraussetzungen zeigen, daß diese Mengen S-regulär sind. Es wird sich ferner herausstellen, daß das in Satz 5.4 angegebene Kriterium (5.3) die S-punktweise Konvexität von V in v_o impliziert.

Definition 5.7

Eine nichtleere Teilmenge V von X_1 heißt S-punktweise konvex in $v_o \in V$ bezüglich (X_1,A,X_2), falls für alle $v \in V$, für jede reelle Zahl $t > 0$ und für jedes Paar (W_1,W_2) von $\mathcal{G}(X_i',X_i)$-abgeschlossenen nichtleeren Teilmengen W_i von $\partial F_i(0)$ mit

$$|\operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v)| \geq a > 0 \quad \text{für } L_i \in W_i \ (i=1,2) \text{ und ein } a \in \mathbb{R}$$

ein $v_t \in V$ mit den folgenden Eigenschaften existiert:

(5.11) $\operatorname{sign} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) = \operatorname{sign} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v_t)$ für alle $L_i \in W_i$ $(i=1,2)$

und

(5.12) $$\max_{i=1,2} \{F_i(A_i v_t - A_i v_o), F_i(A_i v_o - A_i v_t)\} < t .$$

Wir zeigen, daß jede bezüglich $(C(Q,\mathbb{R}), \mathrm{id}_{C(Q,\mathbb{R})}, C(Q,\mathbb{R}))$ S-punktweise konvexe Menge $V \subset C(Q,\mathbb{R})$ (Q kompakter Hausdorffraum) in $v_o \in V$ punktweise konvex in v_o im Sinne von BROSOWSKI[9] ist.

Ist $X_1 = X_2 = C(Q,\mathbb{R})$, $N = F_1 = F_2$ die Supremumnorm auf $C(Q,\mathbb{R})$ und $A = \mathrm{id}_{X_1}$, so ist die Menge $EP(S_{X_1'})$ $\mathcal{G}(X_1',X_1)$-abgeschlossen (siehe SINGER[39]). Außerdem korrespondieren die nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen W_* von Q mit den $\mathcal{G}_{EP(S_{X_1'})}(X_1',X_1)$-abgeschlossenen Teilmengen W von $EP(S_{X_1'})$ vermöge des surjektiven Homöomorphismus G von $Q \times \{-1,1\}$ auf $EP(S_{X_1'})$, welcher durch

$$G(q,e) := L \quad \text{mit } L(g) = e \cdot g(q) \text{ für alle } g \in C(Q,\mathbb{R}),$$

mit $q \in Q$, $e \in \{-1,1\}$ und $L \in EP(S_{X_1'})$

definiert ist (siehe DUNFORD-SCHWARTZ[18]).

Sind nun $v_o, v \in V$, $t > 0$ und eine nichtleere abgeschlossene Menge $W_* \subset Q$ mit

$$|v_o(q) - v(q)| \neq 0 \quad \text{für alle } q \in W_*$$

vorgegeben, so gibt es ein $a > 0$ mit

$$|v_o(q) - v(q)| \geq a \quad \text{für alle } q \in W_* .$$

Dann gilt für die durch G der Menge $W_* \times \{1\}$ zugeordnete Menge $W \subset EP(S_{X_1'})$ die Ungleichung

$$|L(v_o - v)| \geq a > 0 \quad \text{für alle } L \in W .$$

Setzen wir $W_1 := W_2 := W$, so impliziert die S-punktweise Konvexität von V in v_o wegen der $\mathcal{G}(X_1', X_1)$-Abgeschlossenheit von W die Existenz eines $v_t \in V$, welches die Bedingungen (5.11) und (5.12) erfüllt. Demzufolge ist

$$\| v_o - v_t \| < t ,$$

und aus (5.11) folgt

$$\text{sign}(v_o(q) - v(q)) = \text{sign}(v_o(q) - v_t(q))$$

für alle $q \in W_*$. Damit ist die punktweise Konvexität (im Sinne von BROSOWSKI[9]) von V in v_o nachgewiesen.

Satz 5.8

Ist die Menge $V \subset X_1$ in $v_o \in V$ S-punktweise konvex bezüglich (X_1, A, X_2), und gilt

$$\min_{i=1,2} F_i(A_i v_o - A_i f) > 0 \quad \text{für alle } f \in X_1 \setminus \{v_o\} ,$$

so ist V in v_o S-regulär bezüglich (X_1, A, X_2).

Beweis:

Wir geben uns $f \in X_1 \setminus \{v_o\}$, $v \in V$, $t > 0$ und ein Paar von

$\sigma_{EP(\partial F_i(0))}(X_i', X_i)$-abgeschlossenen Mengen W_i mit

$$E_i \subset W_i \subset EP(\partial F_i(0)) \quad (i=1,2)$$

und (5.4) vor. Nach Lemma 1.3 existiert ein $a_1 > 0$ mit

$$\operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) \geq a_1 \quad \text{für alle } L_i \in D_i \quad (i=1,2),$$

und daher gilt insbesondere

$$F_i(A_i v_o - A_i v) > 0 \quad \text{für } i=1,2 .$$

Nach Voraussetzung ist

(5.13) $\operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i f) = F_i(A_i v_o - A_i f) > 0$ für $L_i \in D_i$

für $i=1,2$ und daher

$$a := \min_{(L_1,L_2) \in D_1 \times D_2} \min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) \cdot \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i f) > 0.$$

Aus Stetigkeitsgründen und wegen (5.13) existieren $\sigma_{\partial F_i(0)}(X_i', X_i)$-offene Mengen U_i mit

$$D_i \subset U_i \subset \partial F_i(0) \quad (i=1,2),$$

$$\inf_{(L_1,L_2) \in U_1 \times U_2} \min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) \cdot \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i f) > \frac{a}{2} > 0,$$

$$\operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) > \frac{a_1}{2} > 0$$

und

$$\operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i f) > 0$$

für alle $L_i \in U_i$. Für die $\sigma_{\partial F_i(0)}(X_i', X_i)$-abgeschlossenen Hüllen $\overline{U_i}$ der Mengen U_i gilt insbesondere

$$\operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) \geq \frac{a_1}{2} > 0 \quad \text{für alle } L_i \in \overline{U_i} \quad (i=1,2).$$

Für $i=1,2$ gibt es reelle Zahlen $c_i > 0$ mit

$$c_i \leq F_i(A_iv_o-A_if) - \max_{L_i \in \partial F_i(0)\setminus U_i} \operatorname{Re} L_i(A_iv_o - A_if) .$$

Zu $s \in (0, \min\{t, \frac{a}{2F_1(v_o-v)}, \frac{a}{2F_2(Av_o-Av)}, \frac{c_1}{2}, \frac{c_2}{2}\})$

gibt es wegen der S-punktweisen Konvexität von V ein

$v_s =: v_t \in V$ mit

$$\operatorname{sign} \operatorname{Re} L_i(A_iv_o - A_iv) = \operatorname{sign} \operatorname{Re} L_i(A_iv_o - A_iv_t)$$

für alle $L_i \in \overline{U_i}$ und

$$\max_{i=1,2} \{F_i(A_iv_t - A_iv_o), F_i(A_iv_o - A_iv_t)\} < s < t .$$

Daher ist (5.6) erfüllt, und es bleibt noch die Gültigkeit von (5.5) nachzuweisen.

Für $L_i \in \overline{U_i}$ gilt

$$\operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_if)\cdot \operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_iv_t) - (\operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_iv_t))^2$$

$$= \operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_iv_t)\cdot(\operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_if) - \operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_iv_t))$$

$$\geq \operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_iv_t)\cdot(\operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_if)\cdot\frac{\operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_iv)}{F_i(A_iv_o-A_iv)}$$

$$- \operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_iv_t)) \geq \operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_iv_t)\cdot(\frac{a}{2F_i(A_iv_o-A_iv)} - s) > 0$$

wegen

$$\operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_iv_t) \leq F_i(A_iv_o-A_iv_t) < s \quad \text{für } L_i \in \overline{U_i} \subset \partial F_i(0).$$

Somit folgt

$$(\operatorname{Re} L_i(A_iv_t-A_if))^2 = (\operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_if))^2$$

$$+ (\operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_iv_t))^2 - 2\cdot\operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_if)\cdot\operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_iv_t)$$

$$< (\operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_if))^2 + (\operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_iv_t))^2$$

$$- 2\cdot(\operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_iv_t))^2 = (\operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_if))^2$$

$$- (\operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_iv_t))^2 \leq (\operatorname{Re} L_i(A_iv_o-A_if))^2 .$$

Wegen $\operatorname{Re} L_i(A_iv_o - A_if) > 0$ gilt daher

$$\operatorname{Re} L_i(A_iv_t - A_if) < \operatorname{Re} L_i(A_iv_o - A_if)$$

$$\leq F_i(A_iv_o - A_if) \leq \max_{j=1,2} F_j(A_jv_o - A_jf)$$

für alle $L_i \in \overline{U_i}$. Ferner erfüllen alle $L_i \in \partial F_i(0)\backslash U_i$ die Abschätzung

$$\operatorname{Re} L_i(A_iv_t - A_if) = \operatorname{Re} L_i(A_iv_o - A_if) + \operatorname{Re} L_i(A_iv_t - A_iv_o)$$

$$\leq \max_{L_i \in \partial F_i(0)\backslash U_i} \operatorname{Re} L_i(A_iv_o - A_if) + F_i(A_iv_t - A_iv_o)$$

$$\leq F_i(A_iv_o - A_if) - c_i + F_i(A_iv_t - A_iv_o)$$

$$< F_i(A_iv_o - A_if) - c_i + s \leq F_i(A_iv_o - A_if) - \frac{c_i}{2}$$

$$< F_i(A_iv_o - A_if) .$$

Daher gilt insbesondere

$$\operatorname{Re} L_i(A_iv_t - A_if) < \max_{j=1,2} F_j(A_jv_o - A_jf)$$

für alle $(L_1,L_2) \in W_1 \times W_2$, und folglich ist (5.5) erfüllt. ⌟

Ist V in $v_o \in V$ S-punktweise konvex, und gilt

$$\min_{i=1,2} F_i(A_iv_o - A_ig) > 0 \quad \text{für alle } g \in X_1\backslash\{v_o\} ,$$

so impliziert Satz 5.6, daß die Gültigkeit der SVGKB von V in v_o bezüglich $f \in X_1$ und (F_1,F_2) stets notwendig für $v_o \in B(f,V,(F_1,F_2))$ ist. Diese Aussage läßt sich

jedoch schon unter einer schwächeren Voraussetzung beweisen. Es gilt das

Korollar 5.9

Für eine in $v_o \in V$ bezüglich (X_1,A,X_2) S-punktweise konvexe Teilmenge V von X_1 und für jedes $f \in X_1$ mit

$$\min_{i=1,2} F_i(A_i v_o - A_i f) > 0$$

gilt:

Ist $v_o \in B(f,V,(F_1,F_2))$, so erfüllt V die SVGKB bezüglich f und (F_1,F_2).

Beweis:

Angenommen, es gibt ein $v \in V$ mit

$$\min_{(L_1,L_2) \in E_1 \times E_2} \min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) > 0 .$$

Nach Lemma 1.3 existiert ein $a_1 > 0$ mit

$$\operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) \geq a_1 \quad \text{für alle } L_i \in D_i \ (i=1,2).$$

Analog zum Beweis von Satz 5.8 ergibt sich die Existenz eines $v_t \in V$ mit

$$\operatorname{Re} L_i(A_i v_t - A_i f) < \max_{j=1,2} F_j(A_j v_o - A_j f)$$

für alle $L_i \in \partial F_i(0)$ und i=1,2.

Wegen $\partial F_i(A_i v_t - A_i f) \subset \partial F_i(0)$ ergibt sich im Widerspruch zu $v_o \in B(f,V,(F_1,F_2))$ für i=1,2 die Ungleichung

$$F_i(A_i v_t - A_i f) < \max_{j=1,2} F_j(A_j v_o - A_j f) . \quad \square$$

Bemerkung 5.10

Ist V ein Teilraum von $X_1 \in NVR(\mathbb{R})$ und A eine auf V stetige Abbildung von X_1 nach $X_2 \in NVR(\mathbb{R})$, so weisen wir nach, daß die Bedingung (5.3) von Satz 5.4 die Voraussetzungen von Korollar 5.9 erfüllt.
Zunächst ist anzumerken, daß bei BREDENDIEK[6] die Eigenschaft, beste Simultanapproximation zu sein, stets mit der Zusatzbedingung verbunden ist, daß die beste Simultanapproximation keine Minimallösung eines der beiden Teilprobleme ist.
Daher ist für jedes $f \in X_1 \setminus V$ und jedes $v_o \in V \cap B(f,V,(N_1,N_2))$

$$\min_{i=1,2} N_i(A_i v_o - A_i f) > 0 .$$

Gegeben seien nun $v_o, v \in V$, $s > 0$ und ein Paar (W_1,W_2) von $\mathcal{G}(X_i',X_i)$-abgeschlossenen nichtleeren Teilmengen W_i von $S_{X_i'}$ mit

$|L_i(A_i v_o - A_i v)| \geq a > 0$ für alle $L_i \in W_i$ und ein $a \in \mathbb{R}$.

Ist $v_t := v_o + t\cdot(v - v_o)$ für $t \geq 0$, so gibt es wegen der Stetigkeit von A auf V ein $t_1 > 0$ mit

$$N_2(Av_t - Av_o) < s \quad \text{für alle } t \in [0,t_1] .$$

Außerdem existiert ein $t_2 > 0$ mit

$$N_1(v_t - v_o) = t\cdot N_1(v - v_o) < s \quad \text{für } t \in [0,t_2] .$$

W_2 ist bezüglich der Normtopologie von X_2' abgeschlossen, und für alle $L_2 \in W_2$ gilt insbesondere $L_2(Av_o - Av) \neq 0$. Wegen (5.3) gibt es zu $d := \min_{i=1,2} t_i$ ein $t_o \in (0,d]$ mit

$$\operatorname{sign} L_2(Av_o - Av) = \operatorname{sign} L_2(Av_o - Av_{t_o}) \quad \text{für } L_2 \in W_2 .$$

Ferner gilt

$$\operatorname{sign} L_1(v_o - v) = \operatorname{sign} L_1(v_o - v_{t_o}) \quad \text{für alle } L_1 \in W_1,$$

und daher erfüllt $v_s := v_{t_o}$ die Bedingungen (5.11) und (5.12), und somit ist die S-punktweise Konvexität von V in v_o bezüglich (X_1, A, X_2) nachgewiesen.

Das Korollar 5.9 erweitert die Aussage von Satz 5.4 insbesondere für den Fall der Approximation in normierten Vektorräumen, was wir durch das folgende Beispiel zeigen.

Beispiel 5.11

Seien $X_1, X_2 \in \mathrm{NVR}(\mathbb{K})$ $(N_i \in N(X_i))$, V eine bezüglich $v_o \in V$ quasisternförmige Teilmenge von X_1, l eine lineare Abbildung von X_1 nach X_2 und A die Abbildung

$$Ax_1 := lx_1 + d \quad \text{für } x_1 \in X_1$$

von X_1 nach X_2 mit $d \in X_2$.

Sind $v_o, v \in V$, $s > 0$ und ein Paar (W_1, W_2) von $\mathcal{G}_{\partial F_i(0)}(X_i', X_i)$-abgeschlossenen Teilmengen W_i von $\partial F_i(0)$ mit

$$|\operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v)| \geq a > 0 \quad \text{für alle } L_i \in W_i \text{ und ein } a \in \mathbb{R}$$

vorgegeben, so existiert ein $t_v \in (0,1]$ und ein $t_1 > 0$ mit

$$v_t := v_o + t \cdot (v - v_o) \in V \quad \text{für alle } t \in [0, t_v]$$

und

$$N_1(v_o - v_t) < s \quad \text{für alle } t \in [0, t_1].$$

Ferner gibt es wegen der Linearität von l ein $t_2 > 0$,

so daß $N_2(Av_o - Av_t) < s$ für alle $t \in [0,t_2]$ gilt. Für jedes $t \in (0,\min\{t_1,t_2,t_v\})$ erfüllt $v_s := v_t$ die Bedingungen (5.11) und (5.12), und daher ist V in v_o S-punktweise konvex bezüglich (X_1,A,X_2).

Wie wir aus einer bezüglich (X_1,id_{X_1},X_1) S-punktweisen konvexen Menge eine bezüglich (X_1,A,X_2) S-punktweise konvexe Menge erhalten können, zeigen wir im folgenden

Beispiel 5.12

Es seien $X_1,X_2 \in NVR(\mathbb{K})$ und $A \neq 0$ eine stetige lineare Abbildung von X_1 nach X_2. Ist V eine in $v_o \in V$ bezüglich (X_1,id_{X_1},X_1) S-punktweise konvexe Teilmenge von X_1, so ist V S-punktweise konvex bezüglich (X_1,A,X_2).
Das sehen wir folgendermaßen ein:
Gegeben seien $v \in V$, $t > 0$ und ein Paar (W_1,W_2) von $\mathcal{G}(X_i',X_i)$-abgeschlossenen nichtleeren Teilmengen von $S_{X_i'}$ mit

$$|\operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v)| \geq a > 0 \quad \text{für } (L_1,L_2) \in W_1 \times W_2 \text{ und}$$

ein $a \in \mathbb{R}$. Wegen der Stetigkeit von A ist die transponierte Abbildung A^* bezüglich der schwachen Topologie von X_1' und X_2' stetig (vgl. KELLEY-NAMIOKA[27]), und daher ist $W_2^* := A^*(W_2)$ $\mathcal{G}(X_1',X_1)$-abgeschlossen. Nach Definition von A^* gilt

$$|\operatorname{Re} A^* L_2(v_o - v)| = |\operatorname{Re} L_2(Av_o - Av)| \geq a > 0$$

für alle $L_2 \in W_2$. Also erfüllen alle $L \in W_1 \cup W_2^*$ die

Ungleichung $|\operatorname{Re} L(v_o - v)| \geq a$. Nach Voraussetzung existiert zu $s := \min\{t, \frac{t}{\|A\|}\} > 0$ ein $v_s \in V$ mit

$$\| v_s - v_o \| < s$$

und

$$\operatorname{sign} \operatorname{Re} L(v_o - v) = \operatorname{sign} \operatorname{Re} L(v_o - v_s) \text{ für } L \in W_1 \cup W_2^*.$$

Für $v_t := v_s$ gilt daher $\| v_t - v_o \| < s \leq t$ und

$$\| Av_t - Av_o \| \leq \| A \| \cdot \| v_t - v_o \| < \| A \| \cdot s \leq t .$$

Folglich ist (5.12) erfüllt, und wegen

$$\operatorname{sign} \operatorname{Re} L_2(Av_o - Av) = \operatorname{sign} \operatorname{Re} A^* L_2(v_o - v)$$

$$= \operatorname{sign} \operatorname{Re} A^* L_2(v_o - v_t) = \operatorname{sign} \operatorname{Re} L_2(Av_o - Av_t)$$

für $L_2 \in W_2$ ist V in v_o S-punktweise konvex bezüglich (X_1, A, X_2).

Wir zeigen nun, daß aus der von BREDENDIEK[7] für Fréchet-differenzierbare Abbildungen v und Av angegebenen Bedingungen für die Menge V (, der sogenannten Darstellbarkeitsbedingung), welche die Notwendigkeit der SVGKB für ein $v_o \in B(f, V, (F_1, F_2))$ garantiert, die S-Regularität von V folgt.

Bemerkung 5.13

Es seien $X_1, X_2, X_P \in NVR(\mathbb{R})$ und $N_i \in N(X_i)$ für i=1,2. Die Abbildungen

$$v: \quad X_P \supset P \ni a \longrightarrow v(a) \in X_1$$

und Av seien auf der offenen Menge P Fréchet-differenzierbar.

V erfülle in $v(a) \in V$ die Darstellbarkeitsbedingung (siehe BREDENDIEK[7]) bezüglich (X_1, A, X_2); d.h. Zu jedem $b \in P$ existieren positive stetige Abbildungen

$$G^i_{a,b} : EP(S_{X_i'}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (i=1,2)$$

und $c \in X_P$ mit

(5.14) $L_i(A_i v(a) - A_i v(b)) = G^i_{a,b}(L_i) \cdot L_i(D_{A_i v}(a;c))$

für $L_i \in EP(S_{X_i'})$ und $i=1,2$.

Dabei bezeichnen wir mit $D_{A_i v}(a;c)$ die Anwendung der Fréchet-Ableitung der Abbildung $A_i v$ im Punkt a auf das Element c.

Unter den gegebenen Voraussetzungen wies BREDENDIEK[7] die folgende Aussage nach:

(5.15) Für $f_1 \in X_1 \setminus V$ folgt aus $v(a) \in B(f_1, V, (N_1, N_2))$ die Gültigkeit der SVGKB von V in v(a) bezüglich f_1 und (N_1, N_2).

Wir zeigen nun, daß (5.15) die S-Regularität von V in v(a) bezüglich (X_1, A, X_2) impliziert.

Sei $X := X_1 \times X_2$ und $N \in N(X)$ mit

$$N(x_1, x_2) := \max_{i=1,2} N_i(x_i) \quad \text{für } (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 ,$$

$r > 0$, und für $a \in P$ und $f \in X_1$ sei

$v_o := (v(a), Av(a)) \in B((f, Af), V \times A(V) \cap U_N(v_o, r), N)$. Nach Korollar 3.9 folgt

(5.16) $$\min_{L \in EP(\partial N(v_o - (f,Af)))} L(v_o - k) \leq 0$$

für alle $k \in K_N(v_o, V \times A(V))$.

Wir zeigen zunächst die Gültigkeit der folgenden Relation (vgl. BROSOWSKI[10]):

(5.17) $v_o + (L_v(a;h), D_{Av}(a;h)) \in K_N(v_o, V \times A(V))$ für $h \in X_P$.

Dazu seien $h \in X_P$, $r_1 > 0$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Offenheit von P und der Fréchet-Differenzierbarkeit der Abbildungen Av und v gibt es ein $t \in (0, \varepsilon)$ mit

$$a + t \cdot h \in P ,$$

und es ist

$$\| \tfrac{1}{t} \cdot (v(a + t \cdot h) - v(a)) - D_v(a;h) \| < r_1$$

und

$$\| \tfrac{1}{t} \cdot (Av(a + t \cdot h) - Av(a)) - D_{Av}(a;h) \| < r_1 .$$

Daher ist $\tfrac{1}{t} \cdot (v(a + t \cdot h) - v(a), Av(a + t \cdot h) - Av(a))$

Element von $U_N((D_v(a;h), D_{Av}(a;h)), r_1)$ und

$$v_o + t \cdot (\tfrac{1}{t} \cdot ((v(a + t \cdot h), Av(a + t \cdot h)) - v_o))$$

$$= (v(a + t \cdot h), Av(a + t \cdot h)) \in V \times A(V) ,$$

und folglich ist die Gültigkeit von (5.17) nachgewiesen.

(5.16) und (5.17) implizieren

$$\min_{L \in EP(\partial N(v_o - (f,Af)))} L(D_v(a;h), D_{Av}(a;h)) \leq 0$$

für alle $h \in X_P$.

Da zu jedem $L \in X'$ ein $(L_1, L_2) \in X_1' \times X_2'$ mit

$$L(x_1, x_2) = L_1(x_1) + L_2(x_2) \quad \text{für alle } (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$$

existiert (vgl. KELLEY-NAMIOKA[27]), gibt es zu jedem $h \in X_P$ ein $(L_1,L_2) \in EP(\partial N(v_o - (f,Af)))$ mit

$$L_1(D_v(a;h)) + L_2(D_{Av}(a;h)) \not\leq 0 .$$

Ferner ist (L_1,L_2) genau dann Element von $EP(S_{X'})$, falls entweder $L_1 \in EP(S_{X_1'})$ und $L_2 = 0$ oder $L_2 \in EP(S_{X_2'})$ und $L_1 = 0$ ist (vgl. BREDENDIEK[7]).
Also erfüllt jedes $h \in X_P$ die Ungleichung

$$\min_{(L_1,L_2) \in E_1 \times E_2} L_i(D_{A_i v}(a;h)) \not\leq 0 .$$

Insgesamt haben wir damit gezeigt:

(5.18)
Ist $v_o = (v(a),Av(a))$ ein Element der Menge $B((f,Af),V \times A(V) \cap U_N(v_o,r),N)$ für ein $r > 0$, so gilt

$$\min_{(L_1,L_2) \in E_1 \times E_2} L_i(D_{A_i v}(a;h)) \not\leq 0 \text{ für alle } h \in X_P.$$

Zum Nachweis der S-Regularität seien nun $f \in X_1 \setminus \{v_o\}$, $b \in P$, $t > 0$, und für die $\mathcal{G}_{EP(S_{X_i'})}(X_i',X_i)$-abgeschlossenen Mengen W_i mit

$$E_i \subset W_i \subset EP(S_{X_i'}) \quad (i=1,2)$$

gelte

$$\min_{i=1,2} \cdot L_i(A_i v(a) - A_i v(b)) > 0 \quad \text{für } (L_1,L_2) \in W_1 \times W_2.$$

Daher ist

$$\min_{(L_1,L_2) \in E_1 \times E_2} L_i(A_i v(a) - A_i v(b)) > 0 .$$

Nach Voraussetzung existieren ein $c \in X_P$ und stetige positive Abbildungen $G^i_{a,b}$ $(i=1,2)$ mit

$$\min_{(L_1,L_2) \in E_1 \times E_2} G^i_{a,b}(L_i) \cdot L_i(D_{A_i v}(a;c)) > 0 \ .$$

Nach (5.18) gibt es daher zu $r := t$ ein $d \in P$ mit

$$\max_{i=1,2} \| A_i v(d) - A_i v(a) \| < t$$

und

$$\max_{i=1,2} \| A_i v(d) - A_i f \| < \max_{i=1,2} \| A_i v(a) - A_i f \| \ .$$

Mit $v_t := v(d) \in V$ gilt dann insbesondere

$$L_j(A_j v_t - A_j f) < \max_{i=1,2} \| A_i v(a) - A_i f \|$$

für $L_j \in W_j$ und $j=1,2$, und somit sind die Eigenschaften (5.5) und (5.6) erfüllt.

Ein bekanntes Beispiel für eine der Darstellbarkeitsbedingung genügende Menge V ist das folgende (siehe BREDENDIEK[7]):

Q sei ein kompakter Hausdorffraum und $X_1 = X_2 = C(Q,\mathbb{R})$. Sind die Mengen $\{v(a): a \in P\}$ und $\{Av(a): a \in P\}$ mit $P \subset \mathbb{R}^n$ asymptotisch konvex mit dem gleichen Parameter a(t) (zur Definition der asymptotischen Konvexität siehe MEINARDUS-SCHWEDT[36]), so genügt $V = \{v(a): a \in P\}$ der Darstellbarkeitsbedingung bezüglich $(C(Q,\mathbb{R}),A,C(Q,\mathbb{R}))$ in jedem $v(a) \in V$, falls A eine Fréchet-differenzierbare Abbildung von X_1 nach X_2 ist.

Als Erweiterung dieses Beispiels erhalten wir

Satz 5.14

Seien P eine offene Teilmenge von $X_P \in NVR(\mathbb{R})$, Q ein kompakter Hausdorffraum, H_1 und H_2 Prähilberträume, v eine Fréchet-differenzierbare Abbildung von P nach $C(Q,H_1)$ und A eine stetige lineare Abbildung von $C(Q,H_1)$ nach $C(Q,H_2)$.

$V := \{v(a): a \in P\} \subset C(Q,H_1)$ genüge der Bedingung (F) in v(a) (siehe BROSOWSKI[9]), d.h.

Zu jedem $b \in P$ gibt es eine positive Abbildung $g \in C(Q,\mathbb{R})$ und ein $c \in X_P$ mit

(5.19) $v(q,a) - v(q,b) = g(q) \cdot D_v(a;c)(q)$ für alle $q \in Q$.

Dann erfüllt V die Darstellbarkeitsbedingung in v(a) bezüglich $(C(Q,H_1),A,C(Q,H_2))$.

Beweis:

Für alle $q_1 \in Q$ und $l_1 \in H_1$ mit $\| l_1 \| = 1$ gilt wegen (5.19)

$$(v(q_1,a) - v(q_1,b),l_1)_1 = g(q_1) \cdot (D_v(a;c)(q_1),l_1)_1 ,$$

wobei "$(\cdot,\cdot)_i$" das Skalarprodukt in H_i bezeichnet.

Wegen der Linearität und Stetigkeit von A folgt aus (5.19) ferner:

$Av(q,a) - Av(q,b) = g(q) \cdot D_{Av}(a;c)(q)$ für alle $q \in Q$.

Daher ist

$(Av(q_2,a) - Av(q_2,b),l_2)_2 = g(q_2) \cdot (D_{Av}(a;c)(q_2),l_2)_2$

für alle $q_2 \in Q$ und $l_2 \in H_2$ mit $\| l_2 \| = 1$. Für i=1,2

ist $L_i \in EP(S_{C(Q,H_i)'})$ genau dann (vgl. BROSOWSKI[9]), falls ein $q_i \in Q$ und $l_i \in H_i$ mit $\| l_i \| = 1$ existiert, so daß

$$L_i(g_i) = (g_i(q_i), l_i)_i$$

für alle $g_i \in C(Q,H_i)$ gilt. Definieren wir nun

$$G^i_{a,b}(L_i) := g(q_i) \quad \text{für alle } L_i \in EP(S_{C(Q,H_i)'})$$

und i=1,2, wobei die q_i eineindeutig mit den L_i korrespondieren, so gilt

$$L_i(A_i v(a) - A_i v(b)) = G^i_{a,b}(L_i) \cdot L_i(D_{A_i v}(a;c)) ,$$

und daher ist die Behauptung nachgewiesen. ⌋

Bemerkung 5.15

Definieren wir unter den Voraussetzungen von Satz 5.14 $N \in N(C(Q,H_1) \times C(Q,H_2))$ durch $N(g_1,g_2) := \max_{i=1,2} \| g_i \|$, so folgt unter Berücksichtigung von (5.17) aus Satz 5.14

(5.20) Erfüllt V die Bedingung (F) in v(a), so gilt

$$\left(v(a) + \frac{1}{g}(v(b)-v(a)), Av(a) + \frac{1}{g}(Av(b)-Av(a))\right) \in K_N((v(a),Av(a)), V \times A(V))$$

für alle $b \in P$.

Diese Aussage erlaubt einen weiteren Zugang zum Nachweis der in Beispiel 3.19 gezeigten Beziehung

$$\frac{u_o}{w_o} + \frac{w}{w_o} \cdot \left(\frac{u}{w} - \frac{u_o}{w_o} \right) \in K_{\|.\|}\left(\frac{u_o}{w_o}, V\right) \quad \text{für alle } \frac{u}{w} \in V .$$

für den folgenden Spezialfall:

P sei eine nichtleere konvexe Teilmenge von $X_P \in NVR(\mathbb{R})$, und u_1, u_2 seien Abbildungen von $P \times Q$ nach $\mathbb{R}$, die bezüglich $q \in Q$ stetig und bezüglich $a \in P$ linear und Fréchet-differenzierbar sind. Dann ist die Menge

$$V := \left\{ v(a) := \frac{u_1(a)}{u_2(a)} \in C(Q,\mathbb{R}) : a \in P,\ u_2(a) > 0 \right\}$$

asymptotisch konvex (siehe MEINARDUS-SCHWEDT[36]) mit der Parameterfunktion

$$h(q,t) = \frac{u_2(b,q)}{(1-t)u_2(a,q) + tu_2(b,q)} .$$

Die asymptotische Konvexität ist zur Eigenschaft (F) äquivalent (siehe KRABS[32]), und es ist

$$g(q) = \frac{1}{h(q,0)} = \frac{u_2(a,q)}{u_2(b,q)} .$$

Nach (5.20) folgt daher für die stetige lineare Abbildung A von $C(Q,\mathbb{R})$ nach $C(Q,\mathbb{R})$

$$\left(v(a) + \frac{u_2(b)}{u_2(a)}\cdot(v(b)-v(a)), A\left(v(a) + \frac{u_2(b)}{u_2(a)}\cdot(v(b)-v(a))\right)\right)$$

$$\in K_N((v(a),Av(a))), V \times A(V))$$

für alle $a,b \in P$. Daraus ergibt sich insbesondere

$$\frac{u_1(a)}{u_2(a)} + \frac{u_2(b)}{u_2(a)}\cdot\left(\frac{u_1(b)}{u_2(b)} - \frac{u_1(a)}{u_2(a)}\right) \in K_{\|\cdot\|}\left(\frac{u_1(a)}{u_2(a)}, V\right)$$

für alle $a,b \in P$.

Die Charakterisierung der regulären Punkte einer Menge

$V \subset X \in NVR(K)$ durch die Elemente aus V, für welche die Gültigkeit der VGKB stets notwendig für eine Minimallösung ist (siehe Satz 1.9 und (1.6)), legt die Vermutung nahe, daß eine derartige Äquivalenz auch im Fall der Simultanapproximation gültig ist. Wir untersuchen diese Fragestellung und beweisen den folgenden

Satz 5.16

Für eine lineare Abbildung A von X_1 nach X_2 und ein Element v_o von $V \subset X_1$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(5.21) V ist S-regulär in v_o bezüglich (X_1,A,X_2).

Für alle $f \in X_1$ gilt:

(5.22) Ist $v_o \in B(f,V,(F_1,F_2))$, so erfüllt V die SVGKB in v_o bezüglich f und (F_1,F_2).

Für beide Aussagen ist die Bedingung

Für alle $f \in X_1$ gilt:

(5.23) Aus $v_o \in B(f,V,(F_1,F_2))$ folgt $v_o \in B(tf + (1-t)v_o,V,(F_1,F_2))$ für alle $t \geq 1$.

hinreichend.

Für jedes $f \in X_1$ mit

(5.24) $v_o \in B(f,V,(F_1,F_2))$ impliziert $F_1(v_o-f) = F_2(Av_o-Af)$

folgt die Bedingung (5.23) aus den Eigenschaften (5.21) und (5.22).

Beweis:

(i) Nach Satz 5.6 impliziert die Bedingung (5.21) die Aussage (5.22). Wir setzen nun (5.22) voraus und geben uns ein $f \in X_1 \setminus \{v_o\}$, $v \in V$, $s > 0$ und $\sigma_{EP(\partial F_i(0))}(X_i', X_i)$-abgeschlossene Mengen W_i mit $E_i \subset W_i \subset EP(\partial F_i(0))$ und

$$\min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) > 0 \quad \text{für alle } (L_1, L_2) \in W_1 \times W_2$$

vor. Mit $f_t := t \cdot f + (1-t) \cdot v_o$ für $t \in (0,1)$ folgt wegen

$$F_i(A_i v_o - A_i f_t) = t \cdot F_i(A_i v_o - A_i f)$$

notwendig $D_i = \partial F_i(A_i v_o - A_i f_t)$. Daher gilt

$$(5.25) \quad \min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) > 0$$

für alle $(L_1, L_2) \in EP(\partial F_1(v_o - f_t)) \times EP(\partial F_2(Av_o - Af_t))$. Nach Voraussetzung folgt daher $v_o \notin B(f_t, V, (F_1, F_2))$ für alle $t \in (0,1)$. Somit gibt es zu jedem $t \in (0,1)$ ein $v_t \in V$ mit

$$\max_{i=1,2} F_i(A_i v_t - A_i f_t) < t \cdot \max_{i=1,2} F_i(A_i v_o - A_i f).$$

Ferner gilt für jedes $t \in (0,1)$ die Abschätzung

$$F_i(A_i v_t - A_i v_o) \leq F_i(A_i v_t - A_i f_t) + F_i(A_i f_t - A_i v_o)$$

$$< t \cdot \max_{j=1,2} F_j(A_j v_o - A_j f) + t \cdot F_i(A_i f - A_i v_o) .$$

Wir wählen nun ein $t_o \in (0,1)$, so daß

$$t_o \cdot \Big(\max_{j=1,2} F_j(A_j v_o - A_j f) + F_i(A_i f - A_i v_o) \Big) < s$$

für $i = 1,2$ gilt.

Für $v_s := v_{t_o}$ folgt $\max_{i=1,2} F_i(A_i v_s - A_i v_o) < s$, und

für alle $L_i \in W_i$ ist

$$\operatorname{Re} L_i(A_i v_s - A_i f) \leq F_i(A_i v_s - A_i f) \leq F_i(A_i v_s - A_i f_{t_o})$$
$$+ F_i(A_i f_{t_o} - A_i f) < t_o \cdot \max_{j=1,2} F_j(A_j v_o - A_j f)$$
$$+ (1 - t_o) \cdot \max_{j=1,2} F_j(A_j v_o - A_j f) = \max_{j=1,2} F_j(A_j v_o - A_j f).$$

Daher sind die Bedingungen (5.5) und (5.6) erfüllt, und demnach ist V in v_o S-regulär bezüglich (X_1, A, X_2).

(ii) Wir zeigen jetzt, daß (5.23) die Aussage (5.22) impliziert. Dazu seien $f \in X_1$, $v_o \in B(f, V, (F_1, F_2))$, und angenommen, es existiert ein $v \in V$ mit

$$\min_{(L_1,L_2) \in E_1 \times E_2} \min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) > 0 .$$

Nach Lemma 1.3 gibt es wegen der $\sigma(X_i', X_i)$-Kompaktheit der Mengen D_i ein $a \in \mathbb{R}$, so daß

$$\min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) \geq 2 \cdot a > 0$$

für alle $(L_1, L_2) \in D_1 \times D_2$ gilt. Aus Stetigkeitsgründen existieren dann $\sigma_{\partial F_i(0)}(X_i', X_i)$-offene Mengen U_i, $D_i \subset U_i \subset \partial F_i(0)$, mit

$$\operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) > a > 0 \quad \text{für alle } L_i \in U_i .$$

Für i=1,2 folgt aus der $\sigma(X_i', X_i)$-Kompaktheit von $\partial F_i(0) \setminus U_i$

$$s_i := \max_{L_i \in \partial F_i(0) \setminus U_i} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i f) < F_i(A_i v_o - A_i f) .$$

Für alle $L_i \in U_i$ und $f_t := t \cdot f + (1-t) \cdot v_o$ mit $t \geq 1$ gilt dann die Abschätzung

$$\mathrm{Re}\, L_i(A_i v - A_i f_t) = \mathrm{Re}\, L_i(A_i v_o - A_i f_t) - \mathrm{Re}\, L_i(A_i v_o - A_i v)$$
$$< F_i(A_i v_o - A_i f_t) - a < F_i(A_i v_o - A_i f_t) .$$

Ferner gilt für alle $L_i \in \partial F_i(0) \setminus U_i$ und alle t mit

$$t > \max\left\{ \frac{F_j(A_j v - A_j v_o)}{F_j(A_j v_o - A_j f) - s_j} , 1 : j=1,2 \right\} :$$

$$\mathrm{Re}\, L_i(A_i v - A_i f_t) = \mathrm{Re}\, L_i(A_i v_o - A_i f_t) + \mathrm{Re}\, L_i(A_i v - A_i v_o)$$
$$\leq t \cdot \mathrm{Re}\, L_i(A_i v_o - A_i f) + F_i(A_i v - A_i v_o)$$
$$\leq t \cdot s_i + F_i(A_i v - A_i v_o) < t \cdot s_i + t \cdot (F_i(A_i v_o - A_i f) - s_i)$$
$$= t \cdot F_i(A_i v_o - A_i f) = F_i(A_i v_o - A_i f_t) .$$

Folglich existiert ein $t_o \geq 1$ mit

$$\mathrm{Re}\, L_i(A_i v - A_i f_{t_o}) < F_i(A_i v_o - A_i f_{t_o}) \quad \text{für } L_i \in \partial F_i(0).$$

Wegen $\partial F_i(A_i v - A_i f_{t_o}) \subset \partial F_i(0)$ ergibt sich daher

$$F_i(A_i v - A_i f_{t_o}) < F_i(A_i v_o - A_i f_{t_o}) \quad \text{für } i=1,2,$$

und damit im Widerspruch zu (5.23)

$$v_o \notin B(t_o f + (1-t_o) v_o, V, (F_1, F_2)).$$

(iii) Unter der Voraussetzung von (5.24) zeigen wir nun, daß (5.23) eine Folgerung von (5.22) ist.
Gegeben sei $f \in X_1$ mit $v_o \in B(f, V, (F_1, F_2))$ und $t \geq 1$. Für alle $v \in V$ ist

$$\min_{(L_1, L_2) \in E_1 \times E_2} \min_{i=1,2} \mathrm{Re}\, L_i(A_i v_o - A_i v) \leq 0 ,$$

und mit $f_t := t \cdot f + (1-t) \cdot v_o$ gilt wegen

$$\partial F_i(A_i v_o - A_i f) = \partial F_i(A_i v_o - A_i f_t) =: M_i$$

die Ungleichung

$$\min_{(L_1,L_2) \in EP(M_1)\times EP(M_2)} \min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) \not\leq 0 .$$

Aus der Eigenschaft (5.24) folgt

$$F_1(v_o - f_t) = t \cdot F_1(v_o - f) = t \cdot F_2(Av_o - Af) = F_2(Av_o - Af_t) ,$$

und daher impliziert Satz 5.2

$$v_o \in B(t \cdot f + (1-t) \cdot v_o, V, (F_1, F_2)). \quad \square$$

Ist $X \in LKR(\mathbb{K})$, $F \in SSF(X)$, $X = X_1 = X_2$, $F = F_1 = F_2$ und $A = id_{X_1}$, so ist die Bedingung (5.24) trivialerweise erfüllt. Lassen wir dann für die Definition der Regularität (siehe §1) $X \in LKR(\mathbb{K})$ und $F \in SSF(X)$ zu, so können wir die Aussage (5.7) analog für den obigen Sachverhalt nachweisen. Daher verallgemeinert die Äquivalenz von (5.21) und (5.23) die Aussage von (1.6) für $X \in LKR(\mathbb{K})$ und $F \in SSF(X)$.

§ 6 Charakterisierung einer echten besten Simultanapproximation

Im allgemeinen ist die Bedingung (5.24) von Satz 5.16 eine so gravierende Einschränkung, daß es sich empfiehlt, den Begriff der besten Simultanapproximation im Sinne von BREDENDIEK[6][7] zu modifizieren, um dann insbesondere für lineare Abbildungen A in (5.24) eine allgemeingültige Aussage zu erhalten.
Wir nennen $v_0 \in B(f,V,(F_1,F_2))$ daher eine echte beste Simultanapproximation an $f \in X_1$, falls $v_0 \notin B(f,V,F_1)$ und $Av_0 \notin B(Af,A(V),F_2)$ gilt. Die Menge der echten besten Simultanapproximationen an f bezeichnen wir mit $B'(f,V,(F_1,F_2))$.
Mit einer Beweisidee bei CHENEY[14] zeigen wir

Lemma 6.1
Ist für jedes $g \in X_1$ die Abbildung $x \longrightarrow F_2(Ax - Ag)$ ein konvexes Funktional auf der bezüglich $v_0 \in V$ quasisternförmigen Menge $V \subset X_1$, so ist für $f \in X_1$ jede der beiden folgenden Bedingungen stets hinreichend für $v_0 \notin B(f,V,(F_1,F_2))$:

(6.1) $v_0 \notin B(f,V,F_1)$ und $F_1(v_0 - f) > F_2(Av_0 - Af)$

und

(6.2) $Av_0 \notin B(Af,A(V),F_2)$ und $F_1(v_0 - f) < F_2(Av_0 - Af)$.

Beweis:
Ohne Einschränkung führen wir den Beweis für (6.1) und

setzen daher $v_o \notin B(f,V,F_1)$ und die Existenz eines $a > 0$ mit $F_1(v_o - f) = F_2(Av_o - Af) + a$ voraus.
Angenommen, für alle $v \in U := \{ v \in V: F_2(Av - Av_o) \leq \frac{a}{2} \}$ gilt $F_1(v_o - f) \leq F_1(v - f)$.
Für $U = V$ folgt im Widerspruch zur Voraussetzung $v_o \in B(f,V,F_1)$.
Ist $V \setminus U \neq \phi$, so gilt für jedes $v_1 \in V \setminus U$ die Ungleichung $F_2(Av_1 - Av_o) > \frac{a}{2}$. Es sei $t := a \cdot (2 \cdot F_2(Av_1 - Av_o))^{-1} \in (0,1)$ ohne Einschränkung so klein gewählt, daß $(1-t) \cdot v_o + tv$ Element der Menge V ist.
Wegen

$$F_2(A((1-t) \cdot v_o + tv_1) - Av_o) \leq (1-t) \cdot F_2(Av_o - Av_o) + tF_2(Av_1 - Av_o) = \frac{a}{2}$$

ist $(1-t) \cdot v_o + tv_1 \in U$, und folglich gilt

$$F_1(v_o - f) \leq F_1((1-t) \cdot v_o + tv_1 - f) \leq (1-t) \cdot F_1(v_o - f) + tF_1(v_1 - f) .$$

Also ist $tF_1(v_o - f) \leq tF_1(v_1 - f)$, und daher gilt im Widerspruch zur Voraussetzung $v_o \in B(f,V,F_1)$.
Folglich gibt es ein $v_2 \in U$ mit $F_1(v_2 - f) < F_1(v_o - f)$.
Aus der Ungleichung

$$F_2(Av_2 - Af) \leq F_2(Av_2 - Av_o) + F_2(Av_o - Af) \leq \frac{a}{2} + F_2(Av_o - Af) < F_1(v_o - f)$$

ergibt sich

$$\max_{i=1,2} F_i(A_i v_2 - A_i f) < F_1(v_o - f) \leq \max_{i=1,2} F_i(A_i v_o - A_i f) ,$$

und daher ist $v_o \notin B(f,V,(F_1,F_2))$. ⌋

Ist A eine lineare Abbildung von X_1 nach X_2, so gilt für alle $g,x_1,x_2 \in X_1$ und $t \in [0,1]$:

$$F_2(A(tx_1+(1-t)x_2)-Ag) = F_2(t\cdot(Ax_1-Ag)+(1-t)\cdot(Ax_2-Ag))$$

$$\leq tF_2(Ax_1-Ag) + (1-t)F_2(Ax_2-Ag),$$

und daher erfüllen lineare Abbildungen die Voraussetzung von Lemma 6.1.

In Analogie zu Satz 5.16 erhalten wir

Satz 6.2

Es sei A eine lineare Abbildung von X_1 nach X_2 und $v_0 \in V \subset X_1$. Ist V bezüglich v_0 quasisternförmig, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(6.3) V ist S-regulär in v_0 bezüglich (X_1,A,X_2).

Für alle $f \in X_1$ gilt:

(6.4) Aus $v_0 \in B'(f,V,(F_1,F_2))$ folgt
$v_0 \in B'(tf + (1-t)v_0,V,(F_1,F_2))$ für alle $t \geq 1$.

Für alle $f \in X_1$ gilt:

(6.5) Ist $v_0 \in B'(f,V,(F_1,F_2))$, so erfüllt V die SVGKB in v_0 bezüglich f und (F_1,F_2).

Beweis:

(i) Es gelte (6.3); gegeben seien $f \in X_1$ mit $v_0 \in B'(f,V,(F_1,F_2))$ und $t \geq 1$. Wegen $v_0 \in B(f,V,(F_1,F_2))$ impliziert Satz 5.6

$$\min_{(L_1,L_2)\in E_1\times E_2} \min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) \not\leq 0$$

für alle $v \in V$. Mit $f_t := tf + (1-t)\cdot v_o$ gilt wegen

$$\partial F_i(A_i v_o - A_i f) = \partial F_i(A_i v_o - A_i f_t) =: M_i$$

die Ungleichung

$$\min_{(L_1,L_2)\in EP(M_1)\times EP(M_2)} \min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) \not\leq 0 .$$

Wegen $v_o \in B'(f,V,(F_1,F_2))$ ergibt sich aus Lemma 6.1

$$F_1(v_o - f_t) = F_2(Av_o - Af_t),$$

und daher impliziert Satz 5.2:

$$v_o \in B(f_t,V,(F_1,F_2)) .$$

Nehmen wir ohne Einschränkung $v_o \in B(f_t,V,F_1)$ an, so folgt $v_o \in B(f,V,F_1)$ im Widerspruch zu $v_o \in B'(f,V,(F_1,F_2))$, und daher gilt $v_o \in B'(f_t,V,(F_1,F_2))$. Damit ist die Gültigkeit von (6.4) nachgewiesen.

(ii) Es gelte (6.4), und es sei $f \in X_1$ und v_o Element von $B'(f,V,(F_1,F_2))$. Angenommen, es existiert ein $v \in V$ mit

$$\min_{(L_1,L_2)\in E_1\times E_2} \min_{i=1,2} \operatorname{Re} L_i(A_i v_o - A_i v) > 0 .$$

Analog zum Beweisteil(ii) von Satz 5.16 können wir die Existenz eines $t_o \geq 1$ mit

$$v_o \notin B(t_o f + (1-t_o)\cdot v_o, V, (F_1,F_2))$$

nachweisen. Also ist v_o im Widerspruch zu (6.4) kein Element von $B'(t_o f + (1-t_o)\cdot v_o, V, (F_1,F_2))$.

(iii) Wir setzen nun (6.5) voraus. Analog zum Beweisteil (i) von Satz 5.16 ergibt sich die Gültigkeit von (5.25). Um dann die S-Regularität von V in v_o bezüglich (X_1,A,X_2) nachweisen zu können, brauchen wir nur noch

(6.6) $\qquad v_o \notin B(f_t,V,(F_1,F_2))$

für $f_t := tf + (1-t)v_o$ und alle $t \in (0,1)$ zu beweisen. Aus (5.25) und der Voraussetzung (6.5) ergibt sich

$$v_o \notin B'(f_t,V,(F_1,F_2)) \quad \text{für } t \in (0,1).$$

Wir nehmen ohne Einschränkung die Gültigkeit von $v_o \in B(f_t,V,F_1)$ für ein $t \in (0,1)$ an. Weil v_o nach Voraussetzung ein solarer Punkt von V bezüglich F_1 ist, folgt

$$\min_{L_1 \in EP(\partial F_1(v_o-f_t))} \operatorname{Re} L_1(v_o - v) \not\leq 0$$

aus Satz 1.9. Diese Ungleichung widerspricht jedoch der Aussage (5.25), und daher ist (6.6) gezeigt. ⌟

Eine Charakterisierung der echten besten Simultanapproximationen bei Approximation mit quasisternförmigen Mengen gibt der

Satz 6.3

V sei eine bezüglich $v_o \in V$ quasisternförmige Teilmenge von X_1, und A sei eine lineare Abbildung von X_1 nach X_2.

Dann gilt für alle $f \in X_1$ mit $\min_{i=1,2} F_i(A_i v_o - A_i f) > 0$, $v_o \notin B(f,V,F_1)$ und $Av_o \notin B(Af,A(V),F_2)$:

Es ist $v_0 \in B'(f,V,(F_1,F_2))$ genau dann, falls $F_1(v_0 - f) = F_2(Av_0 - Af)$ gilt und V die SVGKB in v_0 bezüglich f und (F_1,F_2) erfüllt.

Beweis:

Ist $v_0 \in B'(f,V,(F_1,F_2))$, so folgt die Gültigkeit von $F_1(v_0 - f) = F_2(Av_0 - Af)$ aus Lemma 6.1. Mit der Aussage von Korollar 5.9 ergibt sich dann aus $v_0 \in B(f,V,(F_1,F_2))$, daß V die SVGKB in v_0 bezüglich f und (F_1,F_2) erfüllt. Umgekehrt impliziert Satz 5.2 $v_0 \in B(f,V,(F_1,F_2))$, und daher ist nach Voraussetzung $v_0 \in B'(f,V,(F_1,F_2))$. ⌟

Für $X_1,X_2 \in NVR(\mathbb{R})$ und einen Teilraum V von X_1 erhalten wir in Satz 6.3 unter der Voraussetzung der Fréchet-Differenzierbarkeit von A auf V ein Ergebnis von BREDENDIEK[6], wobei in der SVGKB die Abbildung A durch die Fréchet-Ableitung $D_A(v_0;\cdot)$ von A an der Stelle v_0 zu ersetzen ist.

Als eine Anwendung von Satz 6.3 geben wir das

Beispiel 6.4

$C^m(Q,\mathbb{R})$ sei der Vektorraum der auf dem kompakten Hausdorffraum Q m-mal ($m \geq 1$) stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen mit der Čebyševnorm N. $f \in C^m(Q,\mathbb{R})$ soll durch Elemente einer konvexen Teilmenge V von $C^m(Q,\mathbb{R})$, welche f nicht enthält, so approximiert

werden, daß die Ungleichung

$$\max\{\|v_o-f\|,\ \|v_o^{(m)}-f^{(m)}\|\} \leq \max\{\|v-f\|,\|v^{(m)}-f^{(m)}\|\}$$

für alle $v \in V$ erfüllt ist.

Setzen wir $X_1 := C^m(Q,\mathbb{R})$, $X_2 := C(Q,\mathbb{R})$, $F_1 = F_2 = N$ und definieren wir für $g \in C^m(Q,\mathbb{R})$ die lineare Abbildung A durch $Ag := g^{(m)}$, so können wir im Rahmen der dargestellten Theorie eine Charakterisierung für eine echte beste Simultanapproximation angeben.
Weil $C^m(Q,\mathbb{R})$ bezüglich N eine dichte Teilmenge von $C(Q,\mathbb{R})$ ist, stimmen die Mengen $EP(S_{C(Q,\mathbb{R})'})$ und $EP(S_{C^m(Q,\mathbb{R})'})$ überein (vgl. KÖTHE[29]). Daher ergibt sich aus der Darstellung der Extremalfunktionale von $S_{C(Q,\mathbb{R})'}$ (siehe DUNFORD-SCHWARTZ[18]):

$$E_1 = \{L_1 \in C(Q,\mathbb{R})' : L_1(g_1) = \operatorname{sign}(v_o(q_1)-f(q_1))\cdot g_1(q_1) \text{ für alle } g_1 \in C(Q,\mathbb{R}),\ q_1 \in m(v_o-f)\}$$

und

$$E_2 = \{L_2 \in C^m(Q,\mathbb{R})' : L_2(g_2) = \operatorname{sign}(v_o^{(m)}(q_2)-f^{(m)}(q_2))\cdot g_2(q_2) \text{ für alle } g_2 \in C^m(Q,\mathbb{R}),\ q_2 \in m(v_o^{(m)}-f^{(m)})\},$$

wobei $m(g) := \{q \in Q : |g(q)| = \|g\|\}$ ist.

Vereinbaren wir $D^o g := g$ und $D^m g := g^{(m)}$, und definieren wir für $e > 0$ die Menge

$$M := \{(q,k) : q \in Q,\ k \in \{0,m\} \text{ mit } |D^k(v_o(q)-f(q))| = e\},$$

so können wir für jedes $v_o \in B'(f,V,(N,N))$ direkt nach Satz 6.3 die folgende Charakterisierung angeben:

Ist $v_o \notin B(f,V,N)$ und $v_o^{(m)} \notin B(f^{(m)},A(V),N)$, so ist $v_o \in B'(f,V,(N,N))$ genau dann, falls $e = \|v_o - f\| = \|v_o^{(m)}-f^{(m)}\|$ gilt und alle $v \in V$ die Ungleichung

$$\min_{(q,k)\in M} D^k(v_o(q)-v(q))\cdot D^k(v_o(q)-f(q)) \leq 0 \tag{6.7}$$

erfüllen.

Eine beste Simultanapproximation $v_o \in V$ an f können wir nun folgendermaßen charakterisieren:

(6.8) Ist $e := \max\{\|v_o - f\|, \|v_o^{(m)}-f^{(m)}\|\}$, so ist $v_o \in B(f,V,(N,N))$ genau dann, falls alle $v \in V$ die Ungleichung (6.7) erfüllen.

Dies weisen wir folgendermaßen nach:
Für $e = \|v_o - f\| = \|v_o^{(m)}-f^{(m)}\|$ folgt die Hinlänglichkeit von (6.7) aus Satz 5.2. Gilt ohne Einschränkung

$$e = \|v_o - f\| > \|v_o^{(m)}-f^{(m)}\|,$$

so reduziert sich die Ungleichung (6.7) zu:

$$\min_{q\in m(v_o-f)} D^o(v_o(q)-v(q))\cdot D^o(v_o(q)-f(q)) \leq 0 \quad \text{für } v \in V .$$

Also gilt $\min_{L_1\in E_1} L_1(v_o - v) \leq 0$ für alle $v \in V$.

Die Anwendung von Lemma 1.1 impliziert $v_o \in B(f,V,N)$, und daher gilt

$$\max\{\|v_o - f\|, \|v_o^{(m)}-f^{(m)}\|\} = \|v_o - f\|$$
$$\leq \|v - f\| \leq \max\{\|v - f\|, \|v^{(m)}-f^{(m)}\|\}$$

für alle $v \in V$, und folglich ist $v_o \in B(f,V,(N,N))$.

Umgekehrt sei $v_o \in B(f,V,(N,N))$ vorgegeben. Falls wir $v_o \notin B(f,V,N)$ und $Av_o \notin B(Af,A(V),N)$ voraussetzen, folgt die Notwendigkeit von (6.7) aus Satz 6.3.

Wir nehmen nun ohne Einschränkung $v_o \in B(f,V,N)$ an. Gilt

$$e = \| v_o - f \| = \| v_o^{(m)} - f^{(m)} \| ,$$

so folgt wegen $e > 0$ die Behauptung sofort aus dem Korollar 5.9. Gilt jedoch

$$e = \| v_o - f \| > \| v_o^{(m)} - f^{(m)} \| ,$$

so impliziert Satz 1.9 die Ungleichung

$$\min_{L_1 \in E_1} L_1(v_o - v) \leq 0 \quad \text{für alle } v \in V.$$

Also gilt

$$\min_{q \in m(v_o - f)} D^o(v_o(q)-v(q)) \cdot D^o(v_o(q)-f(q)) \leq 0$$

für alle $v \in V$.

Für $\| v_o - f \| < \| v_o^{(m)} - f^{(m)} \| = e$

und $Av_o \in B(Af,A(V),N)$ folgt

$$\min_{q \in m(v_o^{(m)} - f^{(m)})} D^m(v_o(q)-v(q)) \cdot D^m(v_o(q)-f(q)) \leq 0$$

für alle $v \in V$ nach Satz 1.9.

Ist jedoch $Av_o \notin B(Af,A(V),N)$, so ergibt sich im Widerspruch zur Voraussetzung $v_o \in B(f,V,(N,N))$, und damit ist die Notwendigkeit von (6.7) nachgewiesen.

Bemerkung 6.5

Für einen endlichdimensionalen Teilraum V ist (6.8) ein Ergebnis von MOURSUND[37].

Für einen Teilraum V und für m = 1 wurde die Aussage (6.8) für "$v_o \in B'(f,V,(N,N))$" anstelle von "$v_o \in B(f,V,(N,N))$" von BREDENDIEK[6] formuliert. Zum Beweis wurde dabei eine modifizierte Form der Aussage von Satz 6.3 für $X_1, X_2 \in NVR(\mathbb{R})$ herangezogen. Dazu ist jedoch folgendes anzumerken:

(i) Die Theoreme von BREDENDIEK[6] sind stets für einen auf V stetigen Operator A formuliert und bewiesen worden. Der Differentialoperator A ist jedoch auf einem beliebigem Teilraum V bezüglich der Čebyševnormen in $C(Q,\mathbb{R})$ und $C^1(Q,\mathbb{R})$ i.a. nicht stetig (siehe TAYLOR[40]).

(ii) Für den Fall $e = \|v_o - f\| > \|v_o^{(m)} - f^{(m)}\|$ ist $M = m(v_o - f)$ und (6.7) reduziert sich auf

$$\min_{q \in m(v_o - f)} (v_o(q) - v(q))(v_o(q) - f(q)) \leq 0 .$$

Daher erfüllt V die VGKB in v_o bezüglich f und N. Lemma 1.1 impliziert dann $v_o \in B(f,V,N)$, und folglich ist $v_o \notin B'(f,V,(N,N))$.

Eine weitere Anwendung von Satz 6.3 geben wir in

Beispiel 6.6

$f \in C^m([a,b],\mathbb{R})$ $(m \geq 0,\ a < b)$ soll durch Elemente einer Teilmenge V von $C^m([a,b],\mathbb{R}) =: X$, welche bezüglich

$v_o \in V$ quasisternförmig ist und das Element f nicht enthält, bezüglich der Čebyševnorm N approximiert werden, so daß zusätzlich an den paarweise verschiedenen Punkten $q_1,\dots,q_n \in [a,b]$ möglichst gute Übereinstimmung vorliegt, wobei gegebenenfalls positive bzw. negative Abweichungen der Funktions- bzw. Ableitungswerte besonders zu bewerten sind. Für derartige Bewertungen sind die auf $\mathbb{R}$ stetigen sublinearen Funktionale

$$F_{(a_i,b_i)}(x) := \begin{cases} a_i \cdot x & \text{für } x \neq 0 \\ b_i \cdot x & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $a_i < 0$ und $b_i > 0$ für $i=1,\dots,n$ geeignet, und als Approximationsmaß auf X bietet sich

$$\max \left\{ \| v-f \| \, , \, F_{(a_i,b_i)}(v^{(m)}(q_i)-f^{(m)}(q_i)) : i=1,\dots,n \right\}$$

an.

Setzen wir $X_1 := C^m([a,b],\mathbb{R})$, $X_2 := \mathbb{R}^n$, $F_1 := N$ und $F_2 := \max \left\{ F_{(a_i,b_i)} : i=1,\dots,n \right\}$, und definieren wir die lineare Abbildung

$$A: \; X_1 \ni g \longrightarrow Ag := (g^{(m)}(q_i))_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n \, ,$$

so können wir mit Satz 6.3 eine echte beste Simultanapproximation v_o an f charakterisieren.

Es ist

$$EP(\partial F_{(a_i,b_i)}(0)) = \left\{ a_i, b_i \right\} \text{ für } i=1,\dots,n \, ,$$

und daher gilt

$$(6.9) \quad EP(\partial F_2(0)) = \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ (0,..,0,l_i,0,..,0) : l_i \in \left\{ a_i, b_i \right\} \right\} =: D.$$

Ist nämlich $L := (0,..,0,l_i,0,..,0) \in D$ und angenommen, es gibt ein $t \in (0,1)$ und $L^1, L^2 \in \partial F_2(0)$ mit $L^1 \neq L^2$ und

$$L = t \cdot L^1 + (1-t) \cdot L^2 ,$$

so folgt wegen $l_i = L_i = t \cdot L_i^1 + (1-t) \cdot L_i^2$ und $l_i \in EP(\partial F_{(a_i,b_i)}(0))$ notwendig $L_i^1 = L_i^2 = l_i$, und daher

$$G_i(L_i^1) := \sup_{F_{(a_i,b_i)}(x) \leq 1} L_i^1(x) = 1 .$$

Für alle $j \in \{1,...,n\} \setminus \{i\}$ ist $tL_j^1 + (1-t)L_j^2 = 0$, und wegen $L^1 \neq L^2$ existiert ein $k \neq i$ mit $L_k^1 \neq L_k^2$, und folglich ist $L_k^1 \neq 0$ und daher auch $G_k(L_k^1) > 0$. Die Ungleichung

$$1 \geq G_{F_2}(L^1) := \sup_{F_2(x) \leq 1} \sum_{i=1}^{n} L_i^1(x_i) = \sum_{j=1}^{n} G_j(L_j^1)$$

$$\geq G_i(L_i^1) + G_k(L_k^1) = 1 + G_k(L_k^1) > 1$$

liefert einen Widerspruch.

Wir weisen nun die Inklusion $EP(\partial F_2(0)) \subset D$ nach. Dazu sei $L = (L_1,...,L_n) \in EP(\partial F_2(0))$, und angenommen, es gibt $i,j \in \{1,...,n\}$ (ohne Einschränkung sei $i < j$) mit $L_i \neq 0$ und $L_j \neq 0$. Es gilt

$$G_{F_2}(L) = \sum_{k=1}^{n} G_k(L_k) = 1$$

und folglich

$$G_i(L_i), \; G_j(L_j) \in (0,1) .$$

Definieren wir $L^1 := (L_1,..,L_i,0,..,0)$,

$L^2 := (0,..,0,L_{i+1},..,L_j,..,L_n)$, $c := \sum_{k=1}^{i} G_k(L_k)$ und

$d := \sum_{k=i+1}^{n} G_k(L_k)$, so gilt insbesondere $c + d = 1$

und $c,d \in (0,1)$. Aus den Relationen

$$1 = \frac{1}{c} \cdot \sum_{k=1}^{i} G_k(L_k) = G_{F_2}\left(\frac{1}{c} \cdot L^1 \right)$$

$$1 = \frac{1}{d} \cdot \sum_{k=i+1}^{n} G_k(L_k) = G_{F_2}\left(\frac{1}{d} \cdot L^2 \right)$$

folgt dann $\frac{1}{c} \cdot L^1, \frac{1}{d} \cdot L^2 \in \partial F_2(0)$, $\frac{1}{c} \cdot L^1 \neq \frac{1}{d} \cdot L^2$ und

$L = c \cdot \left(\frac{1}{c} \cdot L^1 \right) + d \cdot \left(\frac{1}{d} \cdot L^2 \right)$ im Widerspruch zu

$L \in E\Gamma(\partial F_2(0))$.

Da das Nullfunktional kein Element von $E\Gamma(\partial F_2(0))$ ist, gibt es genau ein $i \in \{1,...,n\}$ mit $L_i \in \{a_i, b_i\}$, und damit ist (6.9) nachgewiesen.

Wie beim Beispiel 6.4 gilt

$$E_1 = \{ L \in C([a,b],\mathbb{R})' : L(g) = \operatorname{sign}(v_o(q)-f(q)) \cdot g(q) \text{ für alle } g \in C([a,b],\mathbb{R}),\ q \in m(v_o-f) \} ,$$

und aus (6.9) erhalten wir

$$E_2 = \bigcup_{i=1}^{n} \{ (0,..,0,l_i,0,..,0) : l_i \in \{a_i,b_i\} \text{ mit } l_i \cdot (v_o^{(m)}(q_i)-f^{(m)}(q_i)) = \max_{i=1,..,n} F_{(a_i,b_i)}(v_o^{(m)}(q_i)-f^{(m)}(q_i)) \} .$$

Ist dann $v_o \notin B(f,V,N)$ und $Av_o \notin B(Af,A(V),F_2)$, so gilt nach Satz 6.3 und Beispiel 5.12:

Genau dann ist $v_o \in B'(f,V,(N,F_2))$, falls

$$e := \|v_o - f\| = \max_{i=1,..,n} F_{(a_i,b_i)}(v_o^{(m)}(q_i) - f^{(m)}(q_i))$$

gilt und falls für alle $v \in V$ die Ungleichung

$$\min \{ (v_o^{(m)}(q_i) - f^{(m)}(q_i)) \cdot (v_o^{(m)}(q_i) - v^{(m)}(q_i)),$$
$$(v_o(q) - f(q)) \cdot (v_o(q) - v(q)) : \; q \in m(v_o - f),$$
$$l_i \cdot (v_o^{(m)}(q_i) - f^{(m)}(q_i)) = e \quad \text{für } l_i \in \{a_i, b_i\} \} \tag{6.10}$$
$$\leq 0$$

erfüllt ist.

Abschließend betrachten wir den folgenden Spezialfall:

$a_i := -c$ und $b_i := c$ für ein $c > 0$ und $i = 1,...,n$.

Dann ist $F_{(a_i,b_i)}(x) = c \cdot |x|$ für $i = 1,...,n$ und (6.10) reduziert sich zu

$$\min \{ (v_o(q) - f(q)) \cdot (v_o(q) - v(q)), D^m(v_o(q_i) - f(q_i)) \cdot D^m(v_o(q_i) - v(q_i)) :$$
$$q \in m(v_o - f), \; c \cdot |v_o^{(m)}(q_i) - f^{(m)}(q_i)| = e \} \leq 0 .$$

Analog zum Beispiel 6.4 können wir die folgende Charakterisierung einer besten Simultanapproximation bei Approximation mit einer konvexen Menge V beweisen:

Ist $e := \max\{\|v_o - f\|, \max_{i=1,..,n} c \cdot |v_o^{(m)}(q_i) - f^{(m)}(q_i)|\}$,

so ist $v_o \in B(f,V,(N,F_2))$ genau dann, falls

$$\min \{ D^k(v_o(q) - f(q)) \cdot D^k(v_o(q) - v(q)) : (q,k) \in M_1 \} \leq 0$$

für alle $v \in V$ gilt.

Dabei ist

$$M_1 := \{ (q,k) \in Q \times \{0,m\} : |D^0(v_0(q)-f(q))| = e \text{ oder } c \cdot |D^m(v_0(q)-f(q))| = e \text{ für } q \in \{q_1,\ldots,q_n\} \} .$$

Bemerkung 6.7

Die in Kapitel II dargestellte Theorie kann durch entsprechende Modifikationen in den Voraussetzungen und Formulierungen der Ergebnisse auch für das folgende allgemeinere Problem entwickelt werden:

Gegeben seien $X_1,\ldots,X_n \in LKR(\mathbb{K})$ $(n \geq 3)$, $F_i \in SSF(X_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ und Abbildungen $A_i : X_1 \longrightarrow X_i$ $(i=2,\ldots,n)$. Dann ist zu $f \in X_1$ ein $v_0 \in V \subset X_1$ mit

$$\max_{i=1,\ldots,n} F_i(A_i v_0 - A_i f) \leq \max_{i=1,\ldots,n} F_i(A_i v - A_i f)$$

für alle $v \in V$

zu bestimmen. Dabei ist $A_1 = id_{X_1}$.

Literaturverzeichnis

1. D. AMIR, F. DEUTSCH: Suns, moons and quasi-polyhedra. J. Approximation Theory 6, 176-201 (1972).

2. D. BRAESS: Geometrical characterizations for nonlinear approximation. J. Approximation Theory 11, 260-274 (1974).

3. W.W. BRECKNER: Zur Charakterisierung von Minimallösungen. Mathematica 12(35), 25-38 (1970).

4. W.W. BRECKNER, B. BROSOWSKI: Zur Charakterisierung von Minimallösungen in normierten linearen Räumen. Mathematica 11(34), 49-52 (1969).

5. W.W. BRECKNER, I. KOLUMBAN: Über die Charakterisierung von Minimallösungen in linearen normierten Räumen. Mathematica 10(33), 33-46 (1968).

6. E. BREDENDIEK: Simultanapproximationen. Arch. Rat. Mech. Anal. 33, 307-330 (1969).

7. E. BREDENDIEK: Charakterisierung und Eindeutigkeit bei Simultanapproximationen. Z. Angew. Math. Mech. 50, 403-410 (1970).

8. B. BROSOWSKI: Über Tschebyscheffsche Approximationen durch asymptotisch konvexe Funktionenfamilien. Computing 1, 214-223 (1966).

9. B. BROSOWSKI: Nichtlineare Tschebyscheff-Approximation. Mannheim: Bibliographisches Institut 1968.

10. B. BROSOWSKI: Nichtlineare Approximation in normierten Vektorräumen. Erschienen in "Abstract Spaces and Approximation", Hrsg. P.L. Butzer und B. Sz. Nagy, ISNM Vol. 10, 140-159. Basel-Stuttgart: Birkhäuser-Verlag 1969.

11. B. BROSOWSKI: Einige Bemerkungen zum verallgemeinerten Kolmogoroffschen Kriterium. Erschienen in "Funktionalanalytische Methoden der numerischen Mathematik". Hrsg. L. Collatz und H. Unger, ISNM Vol. 12, 25-34. Basel-Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1969.

12. B. BROSOWSKI, H. WEBER: Zum Begriff der Regularität in normierten Vektorräumen. Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München, MPI - PAE/Astro. 10, 1-6 (1968).

13. B. BROSOWSKI, R. WEGMANN: Charakterisierung bester Approximationen in normierten Vektorräumen. J. Approximation Theory 3, 369-397 (1970).

14. E.W. CHENEY: Introduction to Approximation Theory. New York: Mc Graw-Hill Book Company 1966.

15. G. CHOQUET: Sur la meilleure approximation dans les éspaces vectoriels normés. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 8, 541-542 (1963).

16. L. COLLATZ: Approximation von Funktionen bei einer und mehreren unabhängigen Veränderlichen. Z. Angew. Math. Mech. 36, 198-211 (1956).

17. A. DUBOVITSKII, A. MILYUTIN: Extremum problems in the presence of restrictions. U.S.S.R. Comp. Math. and Math. Phys. 5, 1-80 (1965).

18. N. DUNFORD, J.T. SCHWARTZ: Linear Operators I. New York: Interscience Publishers, Inc. 1958.

19. C.B. DUNHAM: Characterizability and Uniqueness in real Chebyshev approximation. J. Approximation Theory 2, 374-383 (1969).

20. C.B. DUNHAM: Chebyshev approximation by families with the betweeness property. Trans. Amer. Soc. 136, 151-157 (1969).

21. N. EFIMOV, S. STEČKIN: Some supporting properties of sets in Banach Spaces. (russisch). Dokl. Akad. Nauk SSSR 127, 254-257 (1959).

22. A. GARKAVI: On a criterion for an element of best approximation. (russisch). Sibirsk Math. Z. 5, 472-476 (1964).

23. S.J. HAVINSON: Approximation by elements of convex sets. Soviet Math. Dokl. 8, 98-101 (1967).

24. D. HENZE: Über nichtlineare Approximation in linearen normierten Räumen. Erschienen in "Numerische Analysis, insbesondere Approximationstheorie", Hrsg. L. Collatz und G. Meinardus, ISNM Vol. 9, 259-270 (1966).

25. D. HENZE: Über die Charakterisierung von Minimallösungen bei nichtlinearen Approximationsproblemen. Computing 4, 1-9 (1969).

26. R.B. HOLMES: A course on optimization and best approximation. Springer Verlag: Lecture Notes (1972).

27. J.L. KELLEY, I. NAMIOKA: Linear Topological Spaces. D. van Nostrand Company, Inc. (1963).

28. V. KLEE: Remarks on nearest points in normed linear spaces. Copenhagen: Proc. of the Coll. on Convexity, 168-176 (1965).

29. G. KÖTHE: Topologische Lineare Räume I. Berlin: Springer-Verlag (1966).

30. A.N. KOLMOGOROFF: Eine Bemerkung zu den Polynomen von P.L. Tschebyscheff, die von einer gegebenen Funktion am wenigsten abweichen. (russisch). Usp. Math. Nauk 3, 216-221 (1948).

31. W. KRABS: Über ein Kriterium von Kolmogoroff bei der Approximation von Funktionen. Erschienen in "Numerische Analysis, insbesondere Approximationstheorie", Hrsg. L. Collatz und G. Meinardus, ISNM Vol. 9, 271-282 (1966).

32. W. KRABS: Über differenzierbare asymptotisch konvexe Funktionenfamilien bei der nichtlinearen gleichmäßigen Approximation. Arch. Rat. Mech. Anal. 27, 275-288 (1967).

33. W. KRABS: Asymptotische Konvexität bei der Approximation in normierten Vektorräumen. Math. Z. 108, 368-376 (1969).

34. W. KRABS: Über die Reichweite des lokalen Kolmogoroff-Kriteriums bei der nichtlinearen gleichmäßigen Approximation. J. Approximation Theory 2, 258-264 (1969).

35. P.J. LAURENT: Théorèmes de charactérisation en approximation convexe. Mathematica 10, 95-111 (1968).

36. G. MEINARDUS, D. SCHWEDT: Nicht-lineare Approximationen. Arch. Rat. Mech. Anal. 17, 297-326 (1964).

37. D.G. MOURSUND: Chebyshev approximations of a function and its derivatives. Math. Comp. 18, 382-389 (1964).

38. I. SINGER: Charactérisation des éléments de meilleure approximation dans un éspace de Banach quelconque. Acta Sci. Math. 17, 181-189 (1956).

39. I. SINGER: Choquet spaces and best approximation. Math. Annal. 148, 330-340 (1962).

40. A.E. TAYLOR: Introduction to Functional Analysis. New York: J. Wiley & Sons, Inc. 1958.

41. S.I. ZUHOVICKIJ, S.B. STEČKIN: On the approximation of abstract functions. Trans. Amer. Math. Soc. 16(2), 401-405 (1960).

L E B E N S L A U F

Am 30. Januar 1947 wurde ich, Wolf-Michael Kähler, als Sohn des Silberschmieds Wolfgang Kähler und seiner Ehefrau Elly, geb. Olhorn, in Lübeck geboren.

Nach dem Besuch der Albert-Schweitzer-Schule war ich von 1957 an Schüler des Johanneums zu Lübeck. Im Frühjahr 1966 bestand ich die Reifeprüfung, und im Sommersemester 1966 begann ich das Studium der Mathematik und Physik an der Universität Hamburg. Nach dem dritten Semester wechselte ich zur Ruhr-Universität Bochum über, an welcher ich im Nebenfach Wirtschaftswissenschaft studierte. Im August 1971 legte ich die Diplom-Hauptprüfung in Mathematik ab.

Anschließend war ich am Rechenzentrum der Ruhr-Universität Bochum als wissenschaftlicher Angestellter beschäftigt. In dieser Zeit entstand unter der Anleitung von Herrn Prof. Dr. W. Haußmann die vorliegende Arbeit.

Meine akademische Ausbildung verdanke ich den Herren Professoren W. Benz, H. Ehlich, G. Ewald, W. Haußmann, A. Jäger, K. Kirchgässner, W. Krabs, N. Kuhlmann, W. Niethammer, H. Reichardt, W. Schempp, B. Schips, F. Sommer, E. Sperner und E. Witt.